

水藤チーム・齊藤グループの研究成果

齊藤 宣一（東京大学大学院数理科学研究科）

2017 年 1 月

本研究グループでは、水藤グループ・滝沢グループの研究で利用されている流体構造連成モデルの数値解析手法の数学的な正当性の研究を行っている。現在までに得られている主な成果は次の2つである。

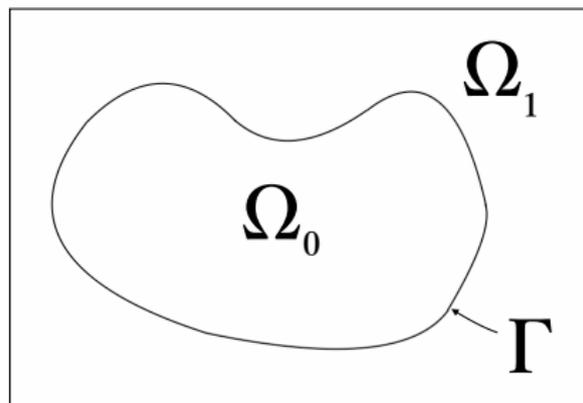
① 埋め込み境界法の解析

② IGA 法の解析

① 埋め込み境界法の解析

② IGA 法の解析

C. S. Peskin (1977) は、人工心臓弁をコンピュータ上でシミュレーションするために、非常に薄い弾性膜（心臓弁）が非圧縮性粘性流体（血液）に埋め込まれていると想定し、数理モデルと数値解法を提案した。その方法は、現在では、**埋め込み境界法**（The immersed boundary method, IB 法）と呼ばれ、広い範囲の**体構造連成** (fluid-structure interaction, FSI) 問題の解法として、本 CREST チームでも応用されている。



例示のため、次の状況を考える。

Ω_0, Ω_1 : 流体領域

Γ : 弾性膜（曲面・曲線と仮定する）

$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Gamma$: 計算領域

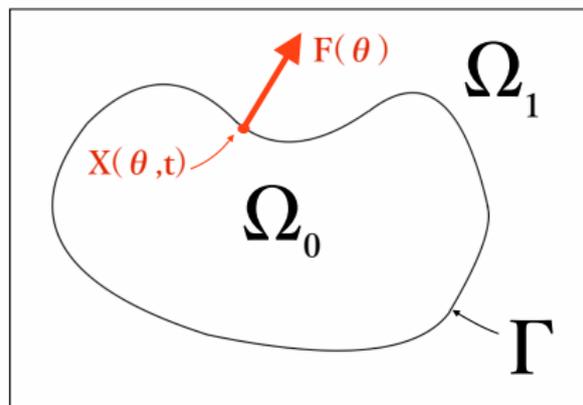
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) は有界領域とする

埋め込み境界法とは？ 2/4

IB法では、膜が流体に及ぼす力を Ω 全体に働く外力 $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ として定式化する。

$$f(x, t) = \int_{\Theta} F(\theta, t) \delta(x - X(\theta, t)) d\theta.$$

ここで、 $X(\theta, t), F(\theta, t)$ は、それぞれ、 Γ 上のラグランジュ座標 $\theta \in \mathbb{R}^{n-1}$ を用いた弾性膜のデカルト座標、および駆動力を表し、 $\delta = \delta(x)$ は Ω 上の n 次元（スカラー値の）Dirac デルタ関数である。



埋め込み境界法とは？ 3/4

IB 法における支配方程式は次のような連立系となる:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

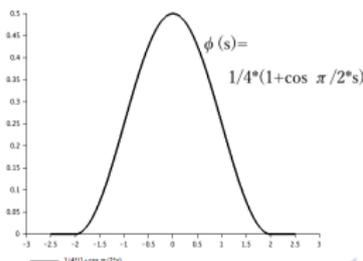
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Theta} \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}, t)) d\boldsymbol{\theta},$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\boldsymbol{\theta}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}, t)) d\mathbf{x}.$$

IB 法とは方程式系の導出のみでなく、その数値解法まで含んでおり、その際にデルタ関数を次のような**正則化デルタ関数**で置き換えた関数を導入する:

$$\delta(\mathbf{x}) \approx \delta^\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n} \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right).$$

ここで、 ϕ としては、 $\phi(s) = \frac{1}{4}(1 + \cos(\frac{\pi}{2}s))$ などが用いられる。



IB 法における支配方程式は次のような連立系となる:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

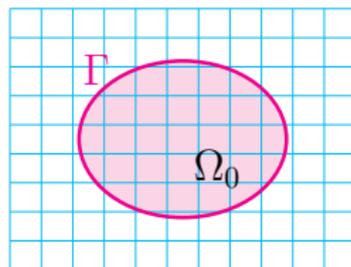
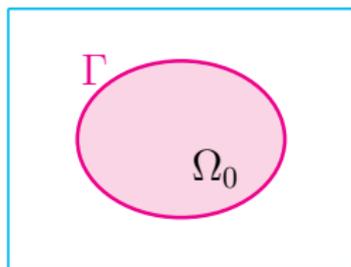
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Theta} \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}, t)) d\boldsymbol{\theta},$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\boldsymbol{\theta}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}, t)) d\mathbf{x}.$$

すなわち、上の方程式系において、 f を、

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \int_{\Theta} \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, t) \delta^\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}, t)) d\boldsymbol{\theta}$$

で置き換えた問題を解く。 f^ε は滑らかな関数なので、標準的な数値解法が適用できる。特に、**直交格子を用いることができ、差分法での計算が可能**である。



先行研究と本研究の動機

差分法による数値実験から、IB 法は最大値に関して **1 次精度** である事が知られている。しかし、理論的に収束の解析を行った論文は、**驚くほど少ない**。

Mori (2008, *Comm. Pure Appl. Math.*) と Liu–Mori (2012, 2014, *SIAM Numer. Anal.*) では、周期境界条件下での定常 Stokes 問題に対して、IB 法の収束解析が報告されている (離散化手法は差分法)。最終的な評価は、準最適な収束率 ($h|\log h|$) となっている。しかし、これらの証明は Green 関数法によって解を明示的に表してから各点評価を行うことに基づいており、より標準的な Dirichlet 境界条件の場合には直ちに適用できない。

実際、IB 法のアイデアは**有限要素法**などの他の離散化手法などにも応用されている一方で、実は支配方程式の解析的な適切性すらもよく議論されていないようである。

本研究の目的は、次の通りである：

- IB 法に対して変分法的なアプローチによって数学的正当性を与える。
- モデル問題として標準的な境界条件のもとでの定常 Stokes 方程式とその有限要素近似を考え、IB 法の収束解析を行う。

本研究の成果は次の論文で公表済みである。

N. Saito and Y. Sugitani: Convergence of the immersed-boundary finite-element method for the Stokes problem, arXiv:1611.07172

簡単のため以後 $t > 0$ は固定されたものとして省略する。また、ベクトル x もスカラーと同様に x などと表す。また、 $\delta_a(x) = \delta(x - a)$ と表す。

命題 1.1

$F \in L^1(\Theta)^n$ とする。このとき、 $f = \int_{\Theta} F(\theta) \delta_{\mathbf{x}(\theta)} d\theta$ は、 Ω 上の符号付き有限測度となる。特に、 $F \in L^p(\Theta)^n$, $1 \leq p \leq \infty$ ならば、その積分 df は

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \varphi df = \int_{\Theta} F(\theta) \cdot \varphi(X(\theta)) d\theta \quad (\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)^n = [W_0^{1,p}(\Omega)^n]')$$

と表現できる。さらに、 f は、 \mathbb{R}^n -Lebesgue 測度に対して特異であり、 $f \notin L^1(\Omega)^n$ となる。

このように f は L^p 関数として扱うことはできない。しかし、汎関数の意味では意味を持っている。

命題 1.2

$F \in L^p(\Theta)^n$, $1 \leq p < \infty$ ならば、 $f \in W^{-1,p}(\Omega)^n$ が成り立つ。

IB 法の収束性を端的に調べるため、次の定常 Stokes 問題を考える:

$$-\nu \Delta u + \nabla \pi = f, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1a)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (1b)$$

$$f = \int_{\Theta} F(\theta) \delta_{\mathbf{x}(\theta)} d\theta \quad (1c)$$

命題 1.2 と Maz'ya and Rossmann (2007) の結果を合わせて次を得る.

定理 1.3

Ω を \mathbb{R}^n 内の連結で有界な凸領域とする. $1 < p \leq 2$ を任意に固定する. このとき, (1) の解 $(u, \pi) \in W_0^{1,p}(\Omega)^n \times L_0^p(\Omega)$ が一意に存在して

$$\|u\|_{W^{1,p}} + \|\pi\|_{L^p} \leq C \|f\|_{W^{-1,p}},$$

をみtas. ここで $C > 0$ は p, Ω のみに依存する定数である. さらに, もし $f \in H^{-1}(\Omega)^n \cap L^p(\Omega)^n$ ならば $(u, \pi) \in W^{2,p}(\Omega)^n \times W^{1,p}(\Omega)$ であり,

$$\|u\|_{W^{2,p}} + \|\pi\|_{W^{1,p}} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

誤差の分割：正則化誤差と離散化誤差

IB 法はデルタ関数の正則化と適当な離散化手法の組み合わせであった。最初にパラメータ $\varepsilon > 0$ に対して**正則化問題**を考える：

$$-\nu \Delta u^\varepsilon + \nabla \pi^\varepsilon = f^\varepsilon, \quad \nabla \cdot u^\varepsilon = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2a)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2b)$$

$$f^\varepsilon = \int_{\Theta} F(\theta) \delta_{X(\theta)}^\varepsilon d\theta \quad (2c)$$

方程式 (2) を有限要素法などで数値的に解いた解を u_h^ε などと書くと、 u との数値解の誤差は三角不等式によって次のように分解される：

$$\|u - u_h^\varepsilon\| \leq \underbrace{\|u - u^\varepsilon\|}_{\text{正則化誤差}} + \underbrace{\|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|}_{\text{離散化誤差}}$$

命題 1.4

(u, p) と $(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon)$ をそれぞれ問題 (1) と問題 (2) の解とする。このとき p, Ω のみに依存して ε によらない定数 $C > 0$ が存在して

$$\|u - u^\varepsilon\|_{W^{1,p}} + \|p - \pi^\varepsilon\|_{L^p} \leq C \|f - f^\varepsilon\|_{W^{-1,p}}$$

$\|f - f^\varepsilon\|_{W^{-1,p}}$ の評価

したがって、正則化誤差を考察するには、 $\|f - f^\varepsilon\|_{W^{-1,p}}$ を計算することが重要である。そこで、 δ^ε を、

$$\delta^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right), \quad \phi: \text{連続でコンパクトサポートを持つ}, \quad \int_{\mathbb{R}} \phi(r) dr = 1$$

の形に限定すれば、 $1 \leq p < \frac{n}{n-1}$ に対して、

$$\|f - f^\varepsilon\|_{W^{-1,p}} \leq C\varepsilon^{1-n+\frac{n}{p}}$$

を導くことができる（この評価に成功したことが本研究の最も大きな成果である）。すなわち、

定理 1.5

(u, π) と $(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon)$ をそれぞれ問題 (1) と問題 (2) の解とする。 $1 \leq p < \frac{n}{n-1}$ に対して、

$$\|u - u^\varepsilon\|_{W^{1,p}} + \|\pi - \pi^\varepsilon\|_{L^p} \leq C\varepsilon^{1-n+\frac{n}{p}}.$$

有限要素近似

次に、離散化誤差について考察する。そのために、正則化問題 (2) を、**気泡要素 (P1b/P1 要素)** を用いた有限要素法で離散化し、有限要素解を $(u_h^\varepsilon, \pi_h^\varepsilon)$ と書く。 h は有限要素メッシュの分割パラメータである。このとき、

命題 1.6

$1 < p \leq \infty$ に対して、

$$\|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|_{W^{1,p}} + \|\pi^\varepsilon - \pi_h^\varepsilon\|_{L^p} \leq Ch \|f^\varepsilon\|_{L^p}$$

これまでの結果を合わせると、全体の誤差評価は次のようになる。

定理 1.7

Ω は凸多面体とする。 $\varepsilon = h$ ととる。このとき、**任意の** $0 < \alpha < 1$ に対して、

$$\|u - u_h^\varepsilon\|_{W^{1,q}} + \|\pi - \pi_h^\varepsilon\|_{L^q} \leq Ch^{1-\alpha} \quad \text{with any } 1 \leq q \leq \frac{n}{n-\alpha}$$

および

$$\|u - u_h^\varepsilon\|_{L^r} \leq Ch^{1-\alpha} \quad \text{with } r = \frac{n}{n-\alpha-1}.$$

が成り立つ。

$\Omega = (-1, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$, $\Gamma = B(0, 1/2)$ として, 次の問題を考える:

$$-\nu \Delta u + \nabla \pi = f + g \text{ in } \Omega, \quad \nabla \cdot u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

ここで, $g = (1, 0)$ である. また, $\Theta = [0, 2\pi]$, $X(\theta) = \frac{1}{2}(\cos(\theta), \sin(\theta))$. 一方で, F は次のようにする: $F(\theta) = -(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

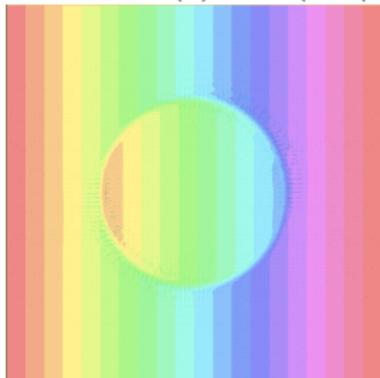


Figure: $p(x, t)$

$\rho_{l,p}^u$ は $u - u_h^\varepsilon$ の $\|\cdot\|_{W^{l,p}}$ での収束率,
 $\rho_{0,p}^\pi$ は $\pi - \pi_h^\varepsilon$ の $\|\cdot\|_{L^p}$ での収束率である.

p	$\rho_{0,p}^u$	$\rho_{1,p}^u$	$\rho_{0,p}^\pi$
1	1.96	1.02	1.41
1.5	1.76	0.707	1.19
2.0	1.61	0.517	1.07

Table: 収束率

- 定常 Stokes 問題に対象を限定しているが、かなり一般的な状況での誤差解析に成功した。
 - 準最適な収束率しか得られていないが、正則化デルタ関数を作る際に使う ϕ について、連続性のみを仮定するだけで誤差評価に成功した。既存の研究では、 ϕ について、様々な条件（モーメント条件など）が課されており、それらを取除けたことは大きな成果である。
 - Dirichlet 境界条件の場合しか記述していないが、ほかの境界条件でもほぼ並行して議論ができる。
 - 例として有限要素法を述べたが、ほかの離散化手法についても同様の議論が可能である。
- 一方、依然として、最適誤差評価の証明は、問題として残っている。
- 現実の構造練成問題の数値解法としての理論的基礎を固めるには、膜 Γ の発展方程式との連立を考える必要がある。これは、今後の課題である。

ただし、さらに研究を進めるには、偏微分方程式論および理論数値解析と連携し次の問題を解決する必要がある。

- $1 \leq p < \frac{n}{n-1}$ とする。このとき、Stokes 問題あるいは Navier-Stokes 問題に弱解 $(u, \pi) \in W_0^{1,p}(\Omega)^n \times L_0^p(\Omega)$ が一意に存在して

$$\|u\|_{W^{1,p}} + \|\pi\|_{L^p} \leq C \|f\|_{W^{-1,p}},$$

をみたか？ Stokes 問題に限れば、 Ω が連結有界凸領域で $1 < p \leq 2$ ならば問題は肯定的に解決される (cf. Maz'ya and Rossmann (2007)) .

- (一般の外力 $f \in L^p$ に対して) Stokes 問題の有限要素近似 (あるいはその他の離散化手法による近似解) $(u_h, \pi_h) \in V_h \times Q_h$ について、次が成り立つか？

$$\|u - u_h\|_{W^{1,p}} + \|\pi - \pi_h\|_{L^p} \leq C \inf_{(v_h, q_h) \in V_h \times Q_h} (\|u - v_h\|_{W^{1,p}} + \|\pi - q_h\|_{L^p}).$$

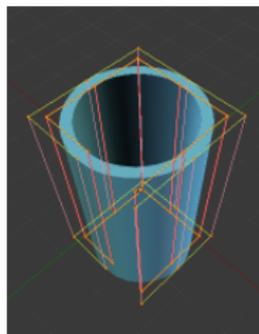
ただし、 (u, π) は Stokes 問題の解である。Girault, Nochetto and Scott (2015) によれば、 Ω が凸多面体ならば、準一様な三角形分割のもとでの有限要素法で、 $1 < p \leq \infty$ について成り立つ。

いずれの場合も、 $p = 1$ の場合の成立に関心がある。

① 埋め込み境界法の解析

② IGA 法の解析

- IGA は、**B-spline** 基底関数、**NURBS** 基底関数を用いた Galerkin 法であり、偏微分方程式の新しい離散化手法と言える。滑らかで高精度の近似を、比較的少ない自由度で実現する。
- CAD(Computer Aided Design) の形状表現と密接に関連している。



T. J. Hughes, J. A. Cottrell and Y. Bazilevs, *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **94** (2005) 4135–4195.

本研究の目的は、次の通りである：

- IGA の基礎理論、とくに通常の有限要素法とは異なる部分の基礎固めの研究。
- B-Spline を利用した時間離散化手法の研究

前者に関しては、まだ具体的な成果はない。以下は、後者で得られた成果について説明する。

K. Takizawa and T. E. Tezduyar: *Space-time computation techniques with continuous representation in time (ST-C)*, *Comput. Mech.* **53** (2014) で提案された successive projection technique (SPT) に対する, 理論的解析, すなわち数学的正当性の確保を行う.

とくに, X をバナッハ空間とする. このとき, 関数 $f \in L^1(0, 1; X)$ に対し, SPT を X 上で定式化し, その安定性・収束性を研究する.

- $X = \mathbb{R}$ の場合は, すでにできていた. (例えば, 2015 年 3 月の応用数理学会研究部会 連合発表会)
- $X = \mathbb{R}^n$ の場合は, 様々な定数が n に依存することを許せば, $X = \mathbb{R}$ の結果を用いれば, 直ちに得られる.
- しかし, 関数 f として, 例えば時間発展偏微分方程式に対する space-time 法による近似解などを想定した場合, それでは不足であり, 抽象的な問題設定を考える必要がある.

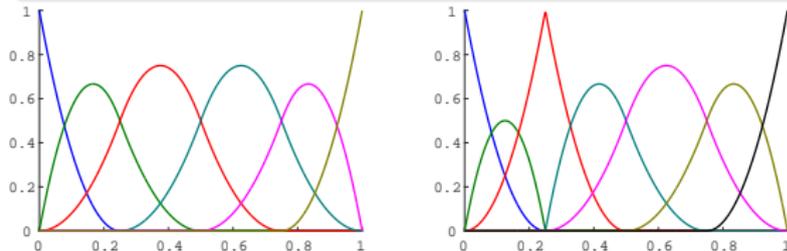
ノットベクトル $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$ ($0 = \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_m = 1$) に対する p 次 B-spline 基底関数は、次で与えられる。

定義 2.1 (Cox-de Boor algorithm)

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$B_{i,p}(t) = \frac{t - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_{i,p-1}(t) + \frac{\xi_{i+p+1} - t}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i+1,p-1}(t).$$

ただし、 $0/0 = 0$ とする。



例: $B_{i,2}(t)$, (左) $\Xi = \{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\}$ (右) $\Xi = \{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\}$

以後は、次の形のノットベクトル（開ノットベクトル）のみを考える。

$$\Xi = \underbrace{\{t_0, \dots, t_0\}}_{p+1}, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}, \underbrace{t_N, \dots, t_N}_{p+1}.$$

ただし、 $t = nh$, $h = 1/N$.

命題

$B_{i,p}$ ($i = 1, \dots, N + p$) は、各 t_j 上で $p - 1$ 回微分可能な、区分的 p 次多項式である。

- B-spline は滑らかさのための自由度が少なく、記述が容易である。
- 大規模計算に応用することで、計算リソースの節約を期待できる。

次のように記号を定める: $n = 1, \dots, N$ に対して,

$$I_n = [t_{n-1}, t_n], \quad J_n = [t_0, t_n] \quad (1 \leq i \leq N),$$

$$S_n = S_{n,p,\Xi}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+p} x_i B_{i,p}(t) |_{J_n} \mid x_i \in X \quad (1 \leq i \leq n+p) \right\}$$

さらに, $S_{p,\Xi}(X) = S_N$, $J = (0, 1)$ とおく.

射影作用素

$$\Pi_n : L^1(J_n; X) \rightarrow S_n \quad (1 \leq n \leq N)$$

を次のように構成する.

$$f \in L^1(J; X)$$

が与えられたとする. はじめに, $\Pi_1(f)$ は $f|_{J_1}$ の S_1 への L^2 射影とする. すなわち,

$$\int_{J_1} (\Pi_1(f) - f) B_{i,p} dt = 0 \quad (1 \leq i \leq p+1).$$

次に, $n \geq 1$ に対して,

$$\Pi_n(f) = \sum_{i=1}^{n+p} x_i^n B_{i,p}|_{J_n} \in S_n$$

が与えられたとして,

$$\Pi_{n+1}(f) = \sum_{i=1}^{n+p+1} x_i^{n+1} B_{i,p}|_{J_{n+1}} \in S_{n+1}$$

を, 次で定める.

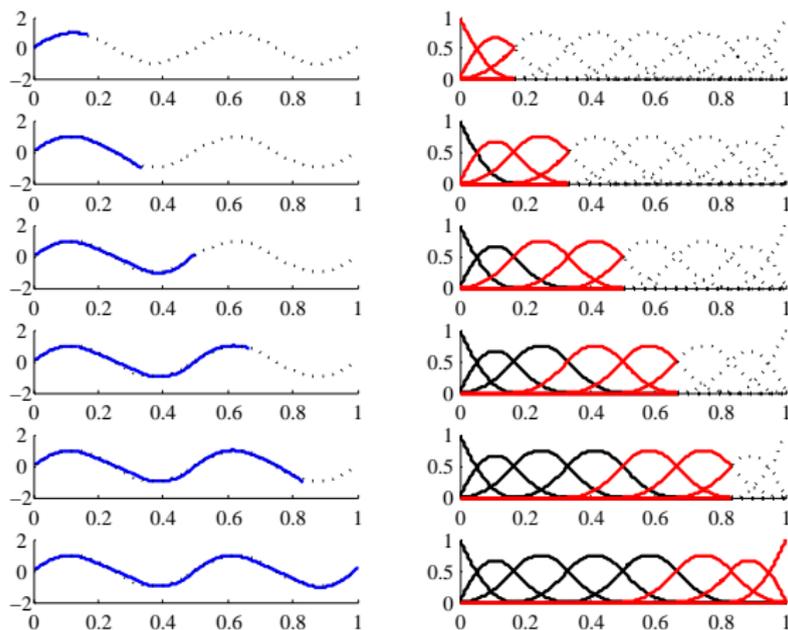
$$x_i^{n+1} = x_i^n \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\int_{J_n} B_{i,p} (\Pi_{n+1}(f) - \Pi_n(f)) dt + \int_{I_{n+1}} B_{i,p} (\Pi_{n+1}(f) - f) dt = 0$$

$$(n+1 \leq i \leq n+p+1).$$

明らかに, $\Pi_n(f)$ は well-defined であり, 最終的に, $\Pi_N(f) \in S_N = S_{p,\Xi}(X)$ を得る.

SPTによる計算例



左は各ステップごとの射影を、右はその計算に用いる基底関数を表している

次のように記号を定める：

$$M_{n+1} = \left(\int_{J_{n+1}} B_{i+n,p}(t) B_{j+n,p}(t) dt \right)_{1 \leq i, j \leq p+1} \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)},$$

$$U = (\delta_{i+1,j})_{1 \leq i, j \leq p+1}, \quad L = U^T.$$

次の行列が重要である：

$$P_{n+1} = U M_{n+1}^{-1} U M_n L.$$

次の条件を考える：

条件 (S) 次を満たす $C_0 > 0$ と $0 < \rho < 1$ が存在する.

$$\left\| \prod_{\ell=1}^k P_{n+1-\ell} \right\|_{\infty} \leq C_0 \rho^k \quad (k = 1, \dots, n-1; n = 2, \dots, N-1).$$

定理 2.1 (安定性)

条件 (S) のもとで,

$$\|\Pi_N(f)\|_{L^\infty(J; X)} \leq C_1 \|f\|_{L^\infty(J; X)}$$

が任意の $f \in L^\infty(J; X)$ に対して成り立つ. $C_1 > 0$ は p にのみ依存する.

定理 2.2 (最良収束率での誤差評価)

条件 (S) のもとで,

$$\|f - \Pi_N(f)\|_{L^\infty(J; X)} \leq C_2 h^{\tilde{k}} |f|_{W^{\tilde{k}, \infty}(J; X)}$$

が任意の $f \in W^{k, \infty}(J; X)$, $k \geq 1$ に対して成り立つ. ここで, $\tilde{k} = \min\{k, p + 1\}$. $C_2 > 0$ は p にのみ依存する.

あとは, 何時, 条件 (S) が成り立つのかを調べればよい. 実はこれは, ある行列のスペクトル半径を評価する問題に帰着されるので, 計算機援用証明などで, p が小さい時には証明が可能である. 実際, $p = 1, 2, 3, 4$ のとき条件 (S) は厳密に成立する.

計算例

$f(t) = \sin(4\pi t)$ について、 $p = 1, 2, 3, 4$ の各場合に SPT を実行する。定理で証明された収束率が観察される。

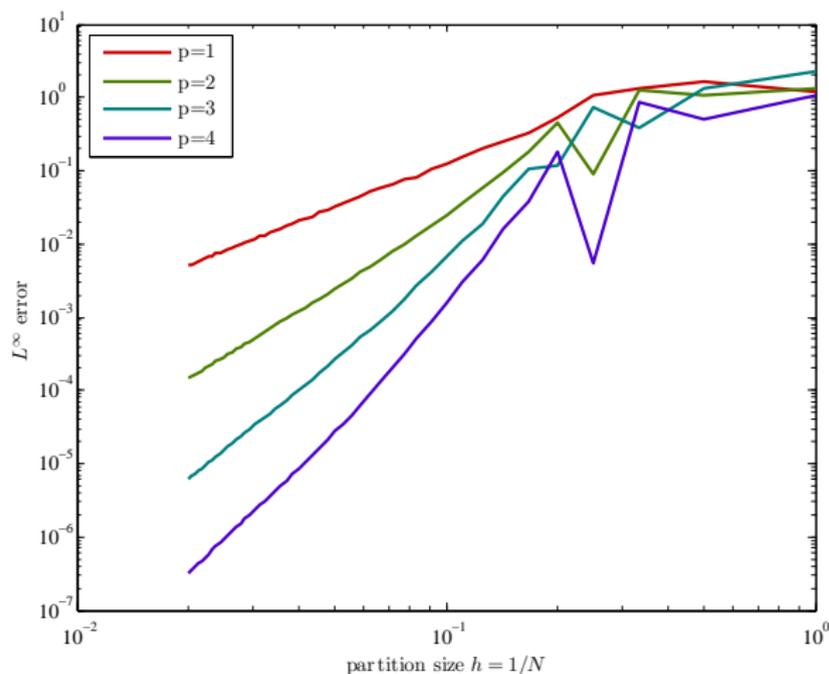


Figure: L^∞ -error of SPT for $f(t) = \sin(4\pi t)$.

- 一般のバナッハ空間値の関数に対して、SPT の安定性・最適収束性を確立した。その際に、B-spline 空間 S_N における基本的な補題（近似能力に関するものなど）を証明した。これらは、今後の研究で役立つ。
- SPT は、すでに得られた近似解を S_N に射影する方法であった。前掲の Takizawa and Tezduyar (2014) では、その他に、時間発展方程式の近似解を直接に得る方法として direct computation technique (DCT) が提案されている。これについて、安定性解析・誤差解析は、現在進行中である。
- 楕円型偏微分方程式、放物型偏微分方程式、Stokes 方程式に対する IGA について、数学的基礎付けの研究も、（現在進行中である一方）今後の課題として残っている。

— 以上 —