論　説

散逸系における粒子パターンの複製・崩壊・散乱のダイナミクス

西　浦　廉　政 *)

1　はじめに

化学反応系の渦巻きパターン，流体系のベナール対流，さらに神経伝播パルスや形態形成パターンなど散逸系のパターンダイナミクスは実に多様である．これらが興味を集めるのは，他の多くの非線形系でも見られるように，ルールは局所的であるにも拘らず，全体としてはデザイナーがいるかのように美しい動的秩序が自発的に現れることである．その仕組みを理解し，さらに予測や制御ができるような数理的見方の枠組を作るのが目的となる．近年のパターンダイナミクスの焦点は単に定常解や時間周期解を見つけることから，より動的で複雑な時空パターンを理解する方向へ向かっている．この解説では，空間的に局在化したパターン，例えばパルスやスポットのような**粒子パターン**の動的ダイナミクスとくに

‘複製，崩壊，衝突による散乱’

に焦点を当て，それらの現状と展望を与えることを試みる．とくに上の3つのプロセスに着目する理由は，図1や図2で与えられるような

‘複雑な時空パターンがこれらを組み合わせて得られる’

と考えられるからである．以下で述べる見方やアプローチはむろん特定のモデルに限定されるものではなく，多くの散逸系に適用できる．

ここではまず図1や図2で用いた次のGray–Scottモデル [5], [23] について議論を進める．(FitzHugh–Nagumo型方程式，Gierer–Meinhardt方程式，また散乱現象のところで現われる，ガス放電現象に関わる3種反応拡散方程式系については後節参照.)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u - uv^2 + F(1-u) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + uv^2 - (F+k)v \end{cases} \tag{1}$$

これは酸化・還元反応のモデルの1種で，FIS反応とよばれる化学反応系のダイナミクスを定性的によく記述する ([13]). u は基質，v は活性因子，F は基質の流入，k は除去率，D_u, D_v はそれぞれの拡散係数であり，3次の非線形性をもつ．これを用いて次の2つの問題を考えよう．

*) 2002年9月26日　島根大学における総合講演者

1. 自己複製，自己崩壊をもたらす機構及びそれらと複雑時空パターンの関係
2. 局在パターンの衝突による散乱現象

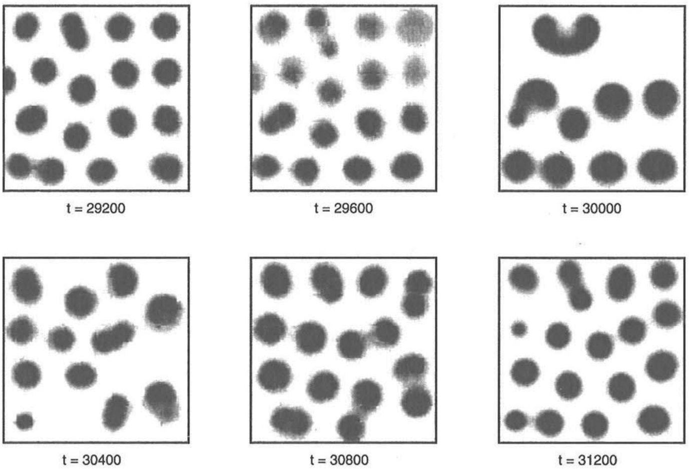

図 1：Gray–Scott モデルにおける 2 次元時空カオスパターン．領域が島状のスポットで埋めつくされた後，スポット間にある種の競合が起こる．右上の 4 つの島は $t = 29600$ で一斉に消え始め，$t = 30000$ では完全に消滅する．一方まわりにあった島はこの空地に侵入すると同時に分裂を始め，$t = 31200$ では再び 4 つの島の状態に戻っている．このような崩壊と分裂による複製が次々と起こり，全体としては時空カオスとなる．

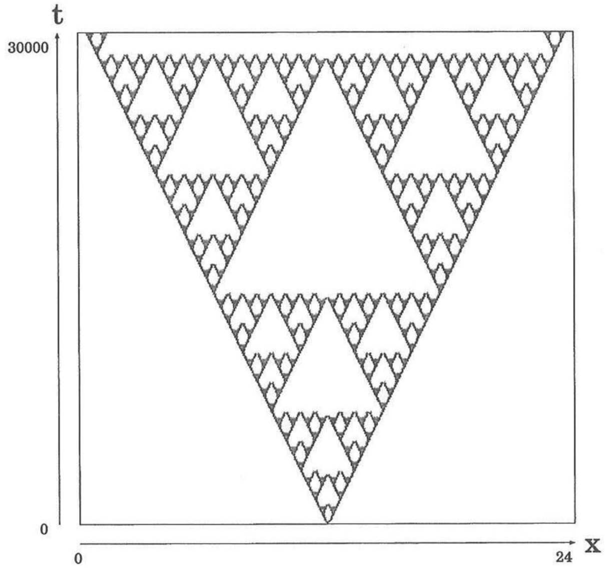

図 2：Gray–Scott モデルにおける時空間自己相似パターン．v-成分をグレースケールで表示している．パルスの自己複製と対消滅のバランスが Sierpinski ガスケット的自己相似パターンを生み出している．これは最初に早瀬・太田 [10] らにより Bonhoeffer–van der Pol 型の方程式に対して得られた．

図 1 を見てもわかるように我々の対象は，短い時空間スケールでは局所的に秩序パターンが観察される．むろんこれは一時的なもので，解は常に ‘分裂’ や ‘崩壊’ を伴いながらいくつかの状態を次々と ‘遍歴’ していく．後に議論する散乱現象も，図 8 や図 9 にあるように 2 つの進行波パルスを衝突させたときの入出力関係はパラメータと共に変化するが，その転移する付近では軌道は奇妙なことにある状態 (後に分水嶺解とよぶもの) に近付いてから出力を出すように見える．我々が最も興味があるのはこのような**遷移的**なダイナミクスである．しかし数学的に捉えるのはどの 1 つをとっても容易ではない．それは次のような困難点があるからである．

- 解そのものについては ‘大変形’ を伴う．
- 軌道が動く範囲は相空間における ‘大域的’ な問題となる．
- 不安定度が高い分水嶺解の発見と解析

むろん力学系理論，分岐理論，特異摂動論そして漸近的手法により解決可能な部分はあるが，多くの場合相空間における局所的ダイナミクスの記述に留まり，全体像には及ばない．最も興味あるのはそれらの局所ダイナミクスの ‘つながり具合’ である．現在のところこれを明らかにする有効な手段は計

算機によるものしかない．それは単にシミュレーションをしてそのつながり具合の雰囲気をつかむという意味ではなく，具体的にパラメータを含む解空間構造の大域的解剖を行い，'何' が軌道をそのように振舞わせているのかを調べることである．この機構に対するある種の幾何的特徴付けの試みが成功すれば，それは多くの現象を説明し得る枠組の候補となり，同時に厳密化への道も開かれる．実際，複製や崩壊では分岐解の**枝の階層構造**，時空カオスに対しては**一般化されたヘテロクリニックループ軌道**が，また粒子パターンの散乱においては，大域的ダイナミクスの '節 (ノード)' とでも言うべき，**分水嶺解**がこのつながり具合の要の役割を果たすことが明らかになる．この解説では全体の流れを重視し，広い読者層を想定した．より詳しい議論，数値計算のデータ等については個々の文献を参照されたい．全般的には [18], [20], [21], [22] を見られるとよいであろう．

最後にここで述べる結果は上山大信 (広島大学)，上田肇一 (北海道大学)，栄伸一郎 (横浜市立大)，寺本敬 (北海道大学) の諸氏との共同研究に基づいている．また多くの方から有益な助言を頂いたことをここで感謝致します．

2 粒子パターンの弱い相互作用と強い相互作用

粒子パターンを含む空間的に局在化した定常解，進行波解，周期解あるいはカオス的に振舞う解など，ある特定の解のクラスを 'Object' とよぶことにする．それらを取り扱う際，大まかに 3 つの段階がある．

1. Object の発見物語
2. Object 間の弱い相互作用によるダイナミクス
3. Object 間の強い相互作用によるダイナミクス

第 1 段階は上に述べたような解の数値的発見，厳密な構成そしてそれらの安定性，分岐解析へとつながる様々な Object の発見物語とその諸性質の解析である．これは Turing の拡散不安定化 (diffusion-driven instability) のアイデアが提唱されて以来，綿々と続いている基本段階であり，新たなモデル系が提案されるとまずここから出発することになる．反応拡散系における特殊関数のリスト作りというべきものである．第 2 段階は構成した Object が複数存在するときそれらの間の相互作用ダイナミクスを考えようというものである．相互作用をしているときの解の状態が Object のコピーを重ね合わせたものでよく近似されるならばそれは '弱い' 相互作用とよぶことにする．粗く言えば，Object が自分の同一性 (identity) を失わずに，尾 (tail) を通してのみ相互作用している状態と言える．フロントが複数存在するときの超微速運動，局在パルスや渦解が十分離れているときの運動はその典型例である．2 次元で言えば，図 1 のようなスポット解が (必要ならリスケーリングして) それが 1 点とみなせるならば，取り扱いは大変楽になる．その相互作用を考えるのもポテンシャル場を通して相互作用する粒子の運動という雰囲気に近くなる．実際，摂動的手法でそのダイナミクスは有限次元の常微分方程式系に帰着される．さて第 3 段階の '強い' 相互作用はそれによりパターンの同一性が失われてしまうものをいう．個々の進行パルスやスポットは安定であっても，それらが激しく衝突すると大変形の後，元の状態とは大きく異なるパターンの出力が見られる．FitzHugh–Nagumo 方程式の進行パルス解の対消滅 (annihilation) は古くから知られている例である．この粒子パターン同士の '散乱過程' は強い相互作用の典型である．1 つの粒子パターンが分裂して，自分と同じものを生み出したり (自己複製)，自発的に消滅 (自己崩壊) する過程も相手はいないが自分自身との強い相互作用と見

れる．これらのダイナミクスをどのように捉えればよいであろうか？ 次の3つが相補的に働くと考えられる．

- **分裂や崩壊の不安定性を伴う粒子パターン間の弱い相互作用理論**
- **大域的分岐探索による駆動機構の解明—個々の軌道から軌道全体の成す幾何学へ**
- **散乱における分水嶺解の解析**

最初の摂動的手法は物理学者により先鞭はつけられたが (例えば [3], [4] 参照)，それらは十分離れた安定なパルス間の相互作用を取り扱うものであった (その数学的証明は例えば，[6] によってなされた)．ここでの興味はさらにそれらが分裂や崩壊の不安定をもちつつ相互作用する場合であり，そのパルス間相互作用の厳密な取り扱いは極めて最近のことである (例えば [7], [9] 参照)．2番目のアプローチ ([14], [15], [18], [19], [20]) においては次のような発想の転換が行われていることに注意しよう：『個々の軌道の詳細を追うのではなく，分岐空間において解の枝全体が成すネットワークがダイナミクスをどのように駆動しているかを調べる』これは言うは易く，行うは難しなのであるが，近年の計算機の発展に助けられて，相当可能となってきた．それによればあるクラスの解の枝全体が成す幾何構造が遷移的なダイナミクスを駆動していることがわかる．従って単にモデルをシミュレーションしているだけではだめで，どうしても AUTO ([2]) に代表される分岐解追跡ソフトによるネットワーク解明が不可欠となる．今後，精度保証計算法が特異点を含む分岐解にも適用できるようになれば，局所分岐理論や特異摂動では難しい中間領域における厳密理論への道も開かれるであろう．3番目の分水嶺解は散乱という真に無限次元空間における変形をどのように理解するかに大きなヒントを与えるものである．後節で述べるように分水嶺解は不安定度 (その解での線形化スペクトルの不安定固有値の数，つまりモース指数) が高く，時間発展のなかで常に目に見える形で出現するわけではないが，軌道の入出力関係を制御する隠れた主役になっている．

3 自己複製と自己崩壊

散逸系の粒子パルスにのみ見られる特徴的なものは相手との相互作用なしに自ら崩壊する‘自己崩壊’パターン，さらに自分自身と同じものを生み出していく‘自己複製パターン’であろう．これらは保存的でないという散逸系の特徴が出ているが，崩壊や生成が粒子という1つのまとまりを単位として行われ，生き生きと見えるのが面白い．自己崩壊と自己複製は一見，逆向きのダイナミクスであるが，分岐論的には共通の機構，すなわち**極限点の階層構造**によるものであることがわかる．この節では空間1次元の場合に限定して話を進める．まず自己崩壊パターンから考えよう．ここでは具体的に多重パルス解の崩壊過程を題材にする．次の FitzHugh–Nagumo 方程式が一定波形を保ちながら伝播するパルスをもつことはよく知られている (例えば [20] の第4章と文献)．

$$\begin{cases} u_t = D_u u_{xx} + u(1-u)(u-a) - v \\ v_t = \varepsilon(u - \gamma v) \end{cases} \tag{2}$$

パルスのテールの振る舞い，すなわち平衡点 $(0,0)$ へ漸近するときの軌道の挙動は進行波座標で見たときの平衡点での固有値に依存して決まる．単調な場合がよく知られているが，パラメータ a, γ をうまくとれば振動するテール (固有値が複素共役対を含む) をもつようにできる．そのとき単調な場合と異なり，安定な多重パルス解をもつことが知られている．ここで閾値パラメータ a を大きく

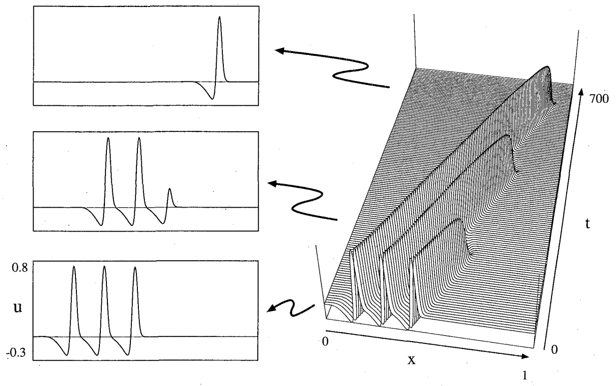

図 3：振動型テールをもつ 3 連パルス解の自己崩壊.

していくと図 3 のように 3 連パルス解は崩壊していく．それは一気に壊れるのではなく，まず先頭のパルスがつぶれ，しばらく 2 連パルスとして進み，再び先頭のパルスがつぶれて，1 連パルスとなり最後にそれもつぶれて崩壊するという過程を経る．個々のパルスが次々と壊れていく過程を逐一記述することは極めて困難であるが，各パルス解の枝全体がどのような構造を成すかを考えると見通しがよくなる．実際，3 連パルスの場合 AUTO を用いて各パルスの枝を追跡すると図 4 のように安定パルスと不安定パルスの枝が会合し，さらにそれら n-連パルス $(n = 1, 2, 3)$ の極限点がほぼ同じ場所に位置し，それより大きい値では伝播するパルス解はない．このような構造は極限点 (あるいはサドル・ノード点もしくはフォールド点) の階層構造とよばれる．極限点そのものは 1 つの伝搬するパルス解であり，パラメータ値が少し大きくなり，パルス解は消滅しても，そこでのベクトル場はそれに近い．よって初期値が適当であれば，極限点付近にしばらく留まることになる．これがある一定の間は普通のパルスのように伝播する理由となっている．これを**極限点の余韻**とよぼう．この余韻の後，解がどのように振舞うかは，下の枝の不安定多様体がどこにつながっているかに依存する．つまり不安定多様体のつながり具合の余韻が効いてくる．今の場合，次々とパルスの山の数が減る方向に軌道は駆動されていくので，最終的には自明な零解に落ち込む．ここで軌道はパルス解がもはや存在しないパラメータ値のところで次々と変遷しているということに注意しよう．そこでは自明な解しかないのであるが，しばらくの間パルスのように振舞うのは，その裏で隠れた分岐とそれに付随する不安定多様体の連結構造が駆動しているからである．とくに**いつ崩壊が起きるのか？** という問に対しては，極限点の位置がその転移点 (onset) を与える．

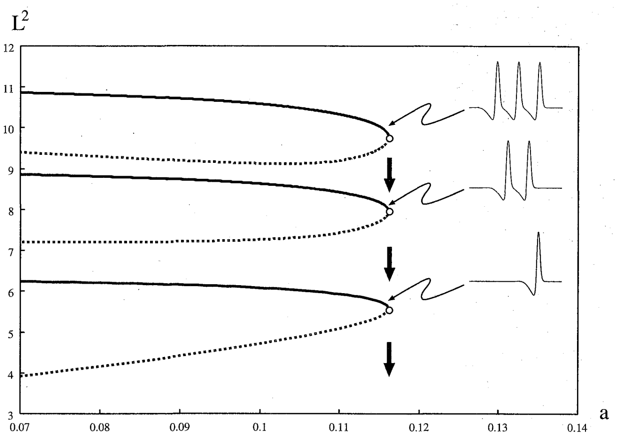

図 4：振動型テールをもつ 3 連パルス解の自己崩壊の大域分岐図．横軸は閾値パラメータ a，縦軸は解のノルム．1 山から 3 山の各パルスの枝の極限点の位置は極めて高い精度で一致する．逐次崩壊が起きるのは，この位置より右のところである．

自己複製は実は上の自己崩壊の逆プロセスとなる．つまり山の数が減る方向ではなく，増える方向に不安定多様体がつながっていれば，崩壊ではなく，複製が起きる．このような構造は Gray–Scott モデルに限ったことではなく，自己複製ダイナミクスのあるところ普遍的に見られる．実際，Gierer–Meinhardt 方程式とよばれる次の形態形成モデル

$$\begin{cases} a_t = \epsilon^2 \Delta a - a + \dfrac{a^2}{h} \\ \epsilon^2 h_t = \Delta h - \mu \epsilon^2 h + a^2 \end{cases} \tag{3}$$

の自己複製パターンとその分岐図を図5に掲げておく．そこでも‘極限点の階層構造’がはっきりと見える．さて図5の時間発展を見ると，斥力的にパルスは反発しながら，分裂する様子がわかる．その個数の増え方は 2^n 的に $1 \to 2 \to 4 \to 8$ ではなく，端に位置するパルスのみが分裂し $1 \to 2 \to 4 \to 6$

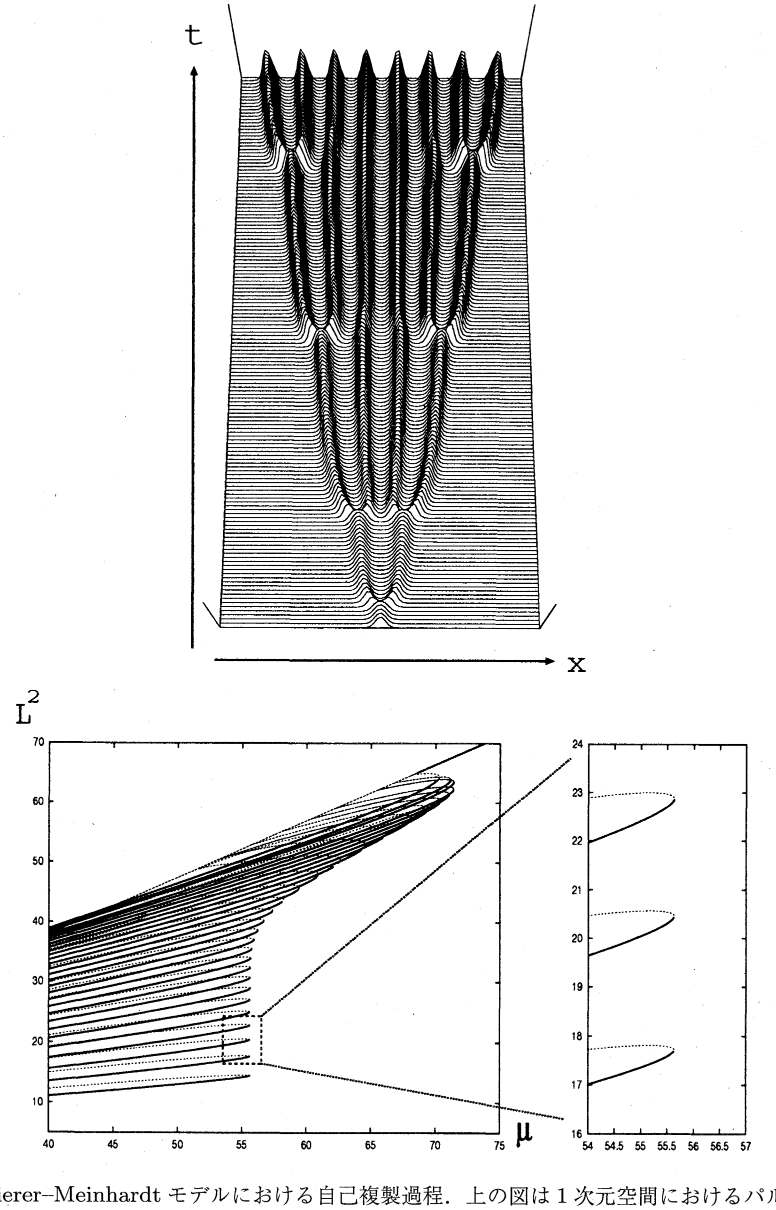

図5：Gierer–Meinhardt モデルにおける自己複製過程．上の図は1次元空間におけるパルスの自己複製の様子を時間軸を縦にとって表示したものである．下の図は1山から始まり N 山定常解の枝を抑制因子の減衰率 μ を分岐パラメータとして数値的に求めたものである．パルス間距離が十分ある下の部分では極限点の位置はほぼ一致している．

というように増える．これは見方を変えれば，内部に定常パルスのクラスターを作りながら広がっていく1つの‘波’の形態である．さてこのクラスターの境界に位置するパルスのみが分裂できるということは示せるであろうか？

これは分裂不安定性を伴うパルス間の弱い相互作用の理論を用いれば厳密に導くことができる ([9])．実際 $N+1$ 個の1次元パルスに適用して，最終的に得られる常微分方程式系の主要部を書くと，次のようになる．

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -M_0(e^{-\alpha h_2} - 2e^{-\alpha h_1}) \\ \dot{h}_j = -M_0(e^{-\alpha h_{j-1}} - 2e^{-\alpha h_j} + e^{-\alpha h_{j+1}}) \\ \dot{h}_N = -M_0(e^{-\alpha h_{N-1}} - 2e^{-\alpha h_N}) \\ \dot{r}_0 = M_1 r_0^2 - \epsilon M_2 - M_3 e^{-\alpha h_1} \\ \dot{r}_j = M_1 r_j^2 - \epsilon M_2 - M_3(e^{-\alpha h_{j+1}} + e^{-\alpha h_j}) \\ \dot{r}_N = M_1 r_N^2 - \epsilon M_2 - M_3 e^{-\alpha h_N} \end{cases} \tag{4}$$

ここで r_j $(j=0,\ldots,N)$ は割れ目の深さ，すなわち分裂の深さを表すパラメータ，h_j $(j=1,\ldots,N)$ は各パルス間距離である．簡単のため，系全体の平行移動に関わる方程式は省略した．また ϵ は極限点からの (符号付き) 距離である．またすべての係数 M_j は正である．パルス間距離 h_j の方程式の右辺は r_j と分離されているので，閉じた形で解析可能となり，今の場合斥力的に反発し合う．r_j の方程式は ϵ 及び h_j の値を固定すると，r_j の2次式であり，r_j が増大するかどうか，すなわち割れ始めるかどうかは，放物線の切片が零以上となるかどうかであり，それはどの h_j が最も大きいかで決まる．[9] の結果より最初に割れ出すのは両端に位置する h_1 もしくは h_N であることがわかる (**境界分裂**)．これは図5の数値実験の結果とも一致する．r_1 または r_N の右辺の切片が零になるという条件からどれだけパルスが離れれば分裂し始めるかという**臨界距離** (それは $\log|\epsilon|$ の大きさに比例する) も定義できる．

4 生成と消滅を繰り返す時空カオス

上で述べてきた生成過程に対応する自己複製と消滅過程に対応する自己崩壊とをうまく組み合わせることができれば，最終状態に落ち込まず，いつまでも動き続けるダイナミクスを作れるのではないかという予想が出てくるが，これはそれほど簡単ではない．図3のパルスの自己崩壊においても，崩壊した先は安定な定数状態で，そこから抜け出すことはできない．一旦，崩壊したように見えるが，そこからまた生まれ出るという復活のダイナミクスが埋め込まれている必要がある．人工的な例ではなく，自然なモデル方程式においてそれがどのような機構に基づいているのかはこれまで明らかではなかった．Gray–Scott モデル (1) に対しては図1で既に生成と消滅を伴う空間2次元の時空カオスを見たが，空間1次元でも図6のように周期パターンの生成と消滅を伴う複雑時空パターンが存在する．図6をある部分区間の‘窓’で観察するといくつかの状態を経巡るサイクルの存在に気付く．それは次のようなものである．

1. 一様状態 $(1,0)$ に有限サイズの局在摂動を加えることにより，自己分裂過程を経て周期構造を

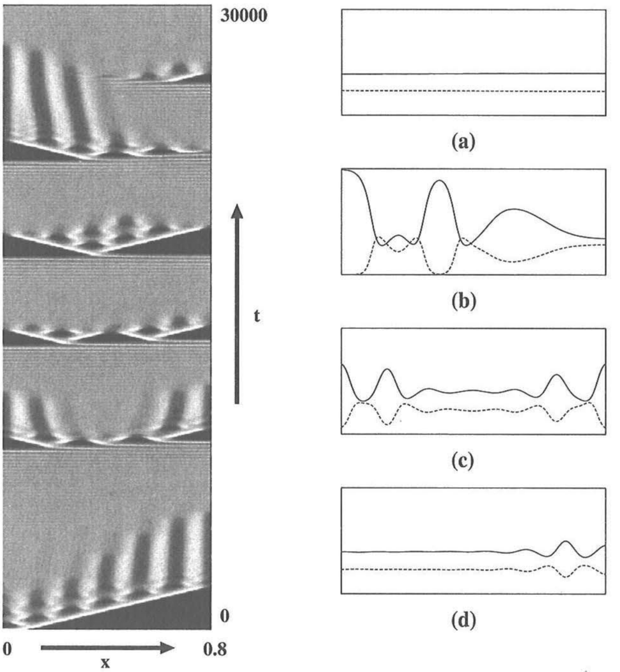

図 6：1 次元時空カオスパターンと空間パターンの変遷．実線は u，点線は v を表わす．

作る．

2. しばらく周期構造に留まる．

3. 周期構造から定数状態 P への崩壊．

4. P の不安定化と一様状態 $(1,0)$ への非一様な回帰．

このループを模式的に書いたのが図 7 である．ここで定数 P は Gray–Scott モデルが自明な定数解 $(1,0)$ 以外にもつ定数平衡解の内の 1 つである．第 1 段階は自己複製過程であり，第 2, 3 段階は極限点の余韻とその後の自己崩壊である．第 4 段階の回帰ダイナミクスがうまく働けば，全体としてぐるぐる回り，我々が期待しているダイナミクスが作れそうである．回帰の際，むろん全域で $(1,0)$ へ戻るという意味ではない（一致してしまえばそこでダイナミクスは止まる）．P の不安定化は実は振動的であり，位相のズレが $(1,0)$ への非一様な収束をもたらし，結果として $(1,0)$ + 局在摂動に戻るという意味で‘非一様’な回帰と書いた．問題はこれら 4 つのプロセスを途中で止まることなく，続けてぐるぐる回るようにパラメータがとれるかということである．この問題は明らかに相空間における大域的問題である．少なくとも空間 1 次元の場合には大域的な分岐探索によりその仕掛けが明らかにされつつある．一言で言うと図 7

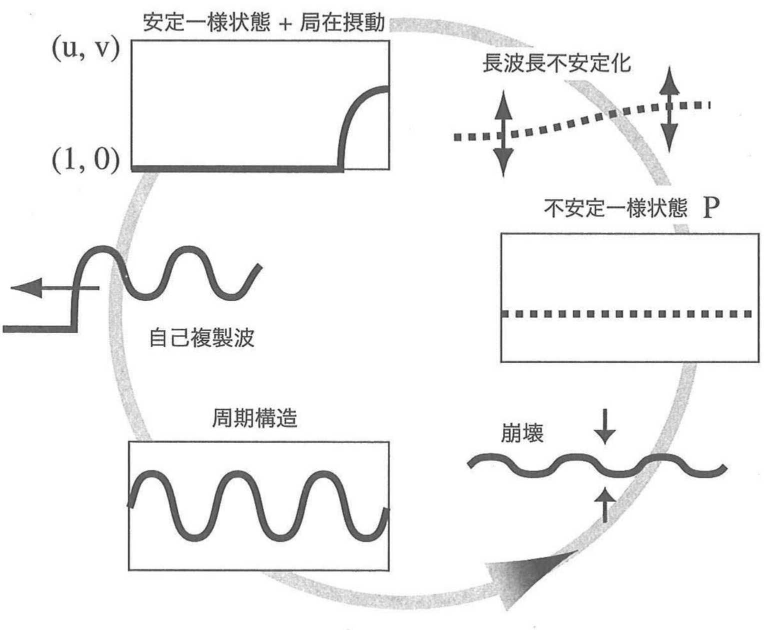

図 7：Gray–Scott モデルにおいて空間周期定常解，不安定定数解 P，安定定数解 $(u,v)=(1,0)$ をめぐるヘテロクリニックサイクルを構成できる．実際の有限区間で観察される時空カオスでは P から $(1,0)$ へ移るとき，区間全体で一様に行くのではなく（真に $(1,0)$ へ落ちればそこから軌道は出られない），必ずそこから自己複製波が生み出される $(1,0)$ 以外の部分が残っている．その結果作られた周期構造は一時的なものであり，しばらくすると定数状態 P に自己崩壊する．この定数 P は長波長領域では Hopf 的に不安定であり，やがて振動しつつ $(1,0)$ へ向かう．

のような‘一般化されたヘテロクリニックサイクル’があるパラメータ値のところで存在し，それを少し開折したところで，時空間カオスが観察されるということが数値的に確かめられている．ページ数の制約で詳しくは述べないが ([15], [21] 参照)，パラメータ空間において単独定常パルスの極限点，周期定常パターンの極限点の集合の最小値，そして定数平衡点のホップ分岐の3つの位置関係が時空カオスの出現と消滅に深く関わる．

5 粒子パターンの散乱

これまでは粒子パターン自身による不安定性，とくに分裂や崩壊について考察してきた．次に重要なものは粒子パターンそのものは安定であるが，他の粒子パターンとの衝突による強い相互作用の解明である．いわば散逸系における散乱実験の解析である．とくに入出力関係を正確に記述し，さらにそれを散乱結果の予測に使いたい．散逸系の粒子散乱の特徴は，同じ方程式の解であってもパラメータの値が変わると，粒子パターンの速度が変わり，その結果，弾性的に反射したり，対消滅したり，あるいは複数の粒子に分裂したりと実に多様であることである ([11], [12])．とくに2次元や3次元では，ぶつかる角度により局在状態に落ち込んだり (分子形成)，衝突後，解のトポロジーが変わってしまう場合もあり，一筋縄ではない．たった1つの進行波スポットでもその挙動は弾性球のそれとはかなり振る舞いが異なることもわかってきている ([8])．これまでと同様に解の大変形を逐一記述することは極めて困難である．また複製や崩壊のように自分自身の解の不安定化をもたらす分岐構造が存在するわけでもない．ここでのアイデアは**分水嶺解** (separator) から衝突現象を見ようというものである ([16] 及び [17] 参照)．この解は非常に広いパラメータ領域で存在しているが，不安定度が高く，発展方程式を解いて解を見ていても普通は表に出てこない．しかし散乱の入出力関係がパラメータと共に変化する遷移点–例えば反射から対消滅へ–においては，それは顔を出す．言い換えれば軌道は分水嶺解の安定多様体に沿ってそれに近付き，やがて離れる．一般には不安定次元は1とは限らないので，分水嶺解に近付く解軌道の探索はその次元に応じた広いパラメータ空間で行う必要がある．これはたとえ空間1次元の問題でも容易ではなく，それがこの観点から散乱を見るという発想を生まなかった理由の1つであろう．この分水嶺解の近くのダイナミクスを調べると，衝突後この近くに来た軌道がどのように振り分けられ，その結果どのような入出力関係をもたらすかが予測できる．さらに特異摂動法などを用いて分水嶺解を厳密に構成することも可能となる．その意味で計算機の1つの役割は，どのような枠組で考え，何が厳密に示し得るかを探る上で羅針盤の役割を果たしていると言える．以下ではまず空間1次元 Gray–Scott モデルの反射・対消滅の遷移点の分水嶺解について述べる．

反射から対消滅へ

Gray–Scott モデルの定常パルス (速度 $c=0$) は互いに反発することは先に挙げたパルス間相互作用の常微分方程式を用いて示せるが，これから直ちに速度が遅いパルス同士も反射することが想像される [7]．これは粗く言えば，速度が遅ければパルスのもっている‘慣性力’(運動エネルギー) が反発力というポテンシャルエネルギーの壁を越えられないであろうという直感に基づく．実際，そのときの解の形は対称形に近く，互いに近付き合うときも，パルス本体が接触する前に反発して向きを変えてしまう．しかし例えば Gray–Scott モデルに含まれているパラメータ k を小さくしていくと，パルス速度は速くなり，衝突時には大きく変形し，ある値以下のところでは**対消滅**するようになる．この遷移点 k_c 前後でのパルスの振る舞いは図8にあるように，激しくぶつかり原形を留めないで変形し，$k >$

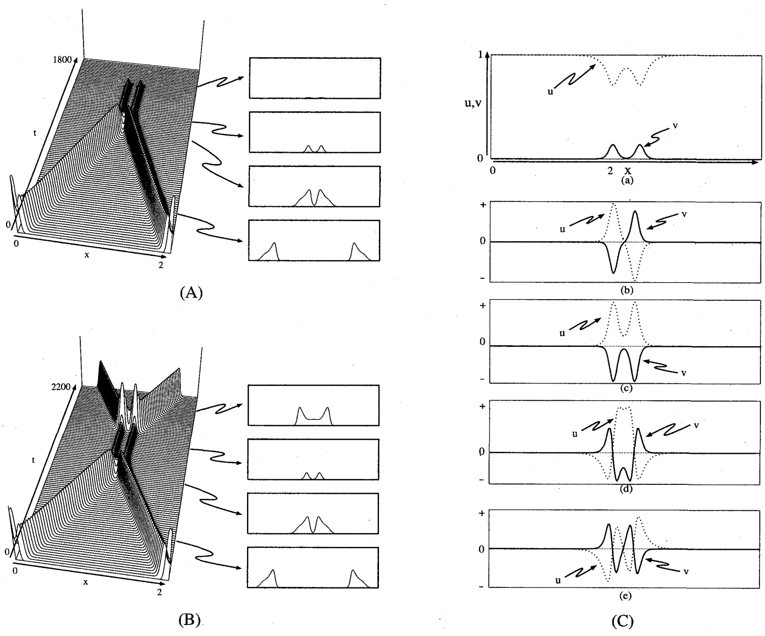

図 8：反射と消滅のセパラトリックス及び固有関数．対消滅 (A) から反射 (B) へとパラメータ k により入出力関係が変わる．どちらの場合も大変形の後，2 本の角をもつ分水嶺解に近付く．分水嶺解 C (a) における線形化スペクトルを計算すると，平行移動から来る零固有値 C (e) 以外に 3 つの不安定固有値が存在し，とくに対称衝突では 2 番目の C (c) の不安定方向が対消滅か反射かの仕分けに重要な役割を果たす．

k_c ならば向きを変えたパルスに整形し，$k < k_c$ ならば消えてしまう．しかし注意して見れば，最終変形の直前は極めて似た形 –2 本の角が生えた双角形– をとることが図 8 よりわかる．実際，解はこのあたりで逡巡するかのように動きがゆっくりとなる．ここから勢いを盛り返せるかどうかが反射と消滅の境目となる．あたかも分水嶺の役割をこの遷移状態は担っているように見える．実際，数値的に Newton 法でこの遷移状態に非常に近い形の定常パルス解 (以下 ‘双角解’ とよぼう) を見つけることができる．図 8 (C) (a) がそれである．これが**分水嶺解**である．線形化スペクトルを計算すると，平行移動に付随する零固有値 (図 8 (C) (e)) 以外に，不安定実固有値が 3 つ存在し，対応する固有関数を実部の大きい順に上から並べると図 8 (C) のようになる．今は左右対称の衝突を考えているので，考える不安定固有関数も左右対称のもの，とくに (c) が重要となる．実際 (c) の固有関数方向に沿って微小な正及び負の摂動を分水嶺解に加えると，負のときは 2 つのパルスが対で現れ，正のときは消滅する．これは分水嶺解とよばれるにふさわしい．従ってこの分水嶺解の近傍のダイナミクスを調べ，軌道がどこを通過するかを見れば，基本的に反射か対消滅かの判定が可能となる．

2 つの分水嶺解を経巡る散乱過程

2 番目の例としてガス放電系の定性的なモデルである 3 種反応拡散系 ([1], [24]) を取り上げ，そこでの散乱現象における多段の遷移過程が分水嶺解の観点からどのように理解されるかを述べよう．このモデルでは，2 次元及び 3 次元進行スポット解の存在が数値的に知られており，空間高次元での散乱実験を行うのに都合がよい．

$$\begin{cases} u_t = D_u \Delta u + 2u - u^3 - \kappa_3 v - \kappa_4 w + \kappa_1 \\ \tau v_t = D_v \Delta v + u - v \\ \theta w_t = D_w \Delta w + u - w \end{cases} \tag{5}$$

図 9 (A) では，τ を分岐パラメータとして，空間 1 次元における定常パルス解の分岐図と，散乱の典型

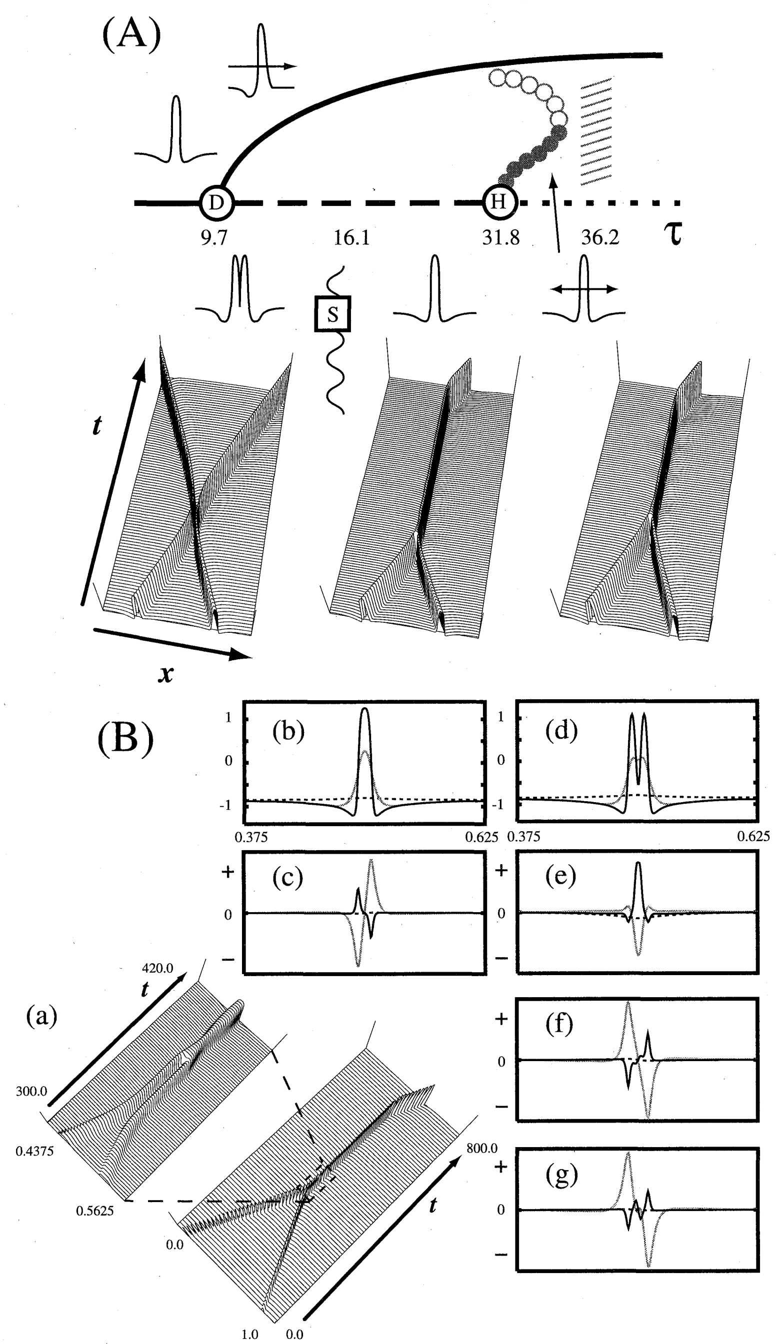

図 9：(A) ガス放電 3 種系における相図：下段は散乱の様子 (左：$\tau = 15.0$，中：$\tau = 20.0$，右：$\tau = 35.0$)．(B) (a) τ が微かに τ^s より大きいとき，解軌道は 2 つの分水嶺解の近くを通る．(b) (c) 単角解とその不安定モード．(d), (e)-(g) 双角解とその 3 つの不安定モード．図中，実線 (灰線，及び破線) は u (v，及び w)-成分を表す．

的な入出力関係を示している．定常パルス解から進行パルス解へのドリフト分岐は，超臨界的に $\tau^d \approx 9.7$ で起こる．この分岐点近くでのパルス間相互作用は反発的なため，図 9 (A) (下段左) のように散乱する．しかしながら τ を大きくすると，2 つのパルス解 (反射) から 1 つのパルス解の発射 (合体) へと，$\tau^s \approx 16.1328079$ で入出力関係が変化する．これまでと大きく違うのは，ここでは 2 つの分水嶺解が 1 つの散乱過程のなかで引き続いて現われる．一方は GS モデルの場合とよく似た，余次元 3 の双角型定常パルス解 (双角解) であり，もう一方は不安定度 1 の単角型定常パルス解 (単角解) である．τ が τ^s より微かにでも小さいと，解軌道は一旦，双角解に近付いた後，2 つのパルス解がそれぞれ，やって来た方向へ帰っていく．一方，τ が τ^s より微かにでも大きいと，軌道は初めは双角解に近付き，それから 2 つの角の凹みの部分が盛り上がり，単角解に近付いていく．(図 9 (B) (a) の拡大図を見よ．) しかしながら，この単角解は，$\tau > \tau^d$ でドリフト不安定なので，しばらく留まった後に，左右どちらかへと動き出すことになる．これら 2 つの分水嶺解を次々と，まるでオリエンテーリングでのチェックポイントのように，解軌道は通過していく．双角解は，3 つの不安定固有値をもつが ($\lambda_1 = 0.9069 > \lambda_2 = 0.1297 > \lambda_3 = 0.0138$)，そのなかの 1 つが飛び抜けて大きく，この不安定性が最終的にダイナミクスを支配する．この λ_1 に対応する不安定モードの形は，左右対称形で中心にピークがある．これが双角解から，単角解への変形を促している．さらに τ を増加しても，しばらくの間は，入出力関係は変化していないように見える．しかしながら，散乱途中のダイナミクスは周期運動を示す．これは単角解が $\tau \approx 31.8$ で，超臨界的にホップ分岐を起こし，定常解だったものが，時間周期解に変化したことを示している．この周期的分水嶺解はドリフト不安定性を依然としてもっていることに注意しよう．解軌道は．一旦，この単角周期解に留まった後，微かな揺らぎからドリフト不安定を起こし，左あるいは右のどちらかにパルスは動き出すことになる (図 9 (A) (下段右))．このように衝突後，不安定度の高い分水嶺解から，低いものへと解軌道が変遷していく．

同じように，2 つの分水嶺解が出現する散乱現象が，空間 2 次元における進行スポット解同士の真正面衝突実験についても見つかっている．τ が十分に小さいときは，動かない単角型スポット解が安定である．τ を大きくすると，$\tau \approx 28.8$ で不安定化して右あるいは左に等速度で動き出す．(進行スポット解は，$\tau \approx 94.0$ まで安定である．) ドリフト分岐近傍では，2 つの進行スポット解は反射する．空間 1 次元と同じように τ を分岐パラメータとして，逆方向に進む 2 つのスポット解を出力に返す反射から，τ を大きくしていくと，合体の後に 1 つの進行スポット解となるものへ出力は変化する．図 10 (A) は，反射-合体の境目の $\tau^s \approx 69.54853$ 値より微かに大きい τ 値での散乱実験の様子である．解軌道はまず，瓢箪型の不安定定常解 (瓢箪解：図 10 (A) 左下) に近付き，そして単角型の不安定定常解 (単角解：図 10 (A) 右上) となる．しばらくの単角解に留まった後，上下左右いずれかの方向へ動き出し，元の進行スポット解となる．一方，τ が τ^s より微かでも小さいならば，2 つのスポットは瓢箪解に近付いた後，それぞれお互いにやって来た方角へ帰っていく．

実際に定常解に近い解 (例えば，図 10 (A)，time = 200. と time = 300.) から，それぞれの分水嶺解を具体的に得ることができる．瓢箪解は零固有値の他に，5 つの不安定固有値をもつ．なかでも，最大不安定固有値 ($\lambda_1 = 0.6275$) が他に比べて桁 1 つ大きく，瓢箪解まわりの解軌道を支配する．この軸対称な不安定固有関数 ϕ_1 (図 10 (B) (a)) は，瓢箪解の “くびれ” を持ち上げる，あるいは切り離すのに具合がよい形をしている．一方，単角解については，2 つの不安定固有値と 2 つの零固有値が存在する．この 2 つの不安定固有値 ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0.0921$) に対応する不安定モード (図 10 (B) (b))

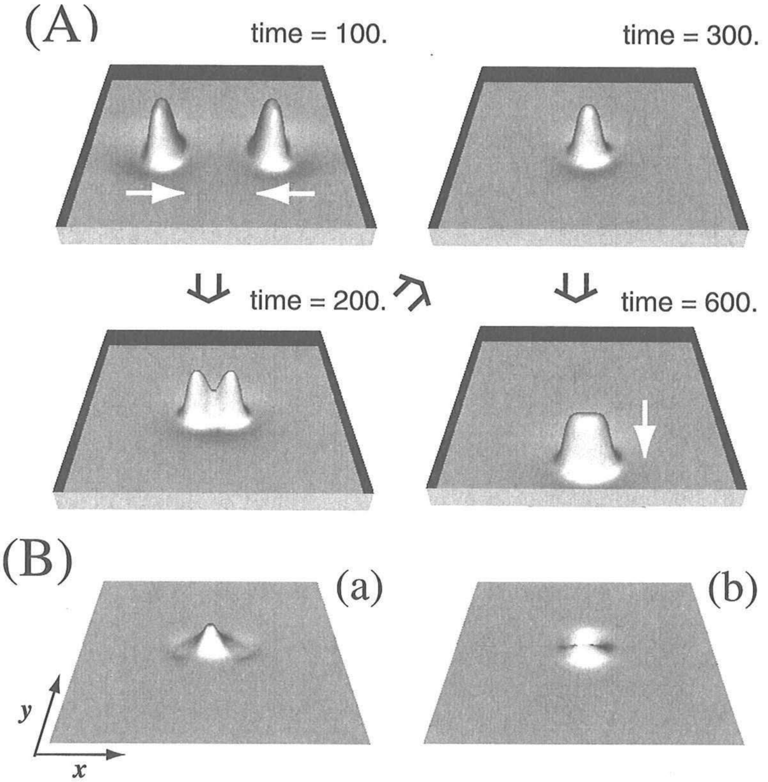

図 10：(A) 進行スポット解の散乱過程 (u 成分のみ表示している.), (B) (a) 瓢箪解 (b) 単角解について，その最不安定モード固有関数 ϕ_1 の形状.

は，それぞれの軸について同じプロファイルをもっている．これらは，それぞれの方向へのドリフト不安定性を示唆している．

空間高次元では，真正面衝突は滅多に起こるものではない．斜め方向の衝突では，2 つの進行スポット解の相互作用は斥力的で，軌道は反れてしまう．しかしながら，空間パターンの個数やパターンそのもののトポロジーといった定性的性質は真正面衝突を通した強い相互作用によってのみ変化し得る．つまり，そのような稀なイベントによってのみ，質的に全く新しい状態へ至ることができる．

6　今後に向けて

複雑時空パターンを解明する上で，遷移ダイナミクスをどのように理解するかは決定的に重要となる．その代表的な例として，自己複製や自己崩壊さらにそれらが組み合わされた時空カオス，そして最後に進行パルスやスポットの強い相互作用として散乱現象を取り上げた．これらはほとんどこれまで数学的には未開拓領域であった．平衡から遠いところでの興味あるパターンダイナミクスは非変分的構造をもち，比較定理や漸近的手法だけでは限界がある．そのため計算機による解構造の探索，ダイナミクスの解明が不可欠となるが，とりわけ AUTO 等による大域的な分岐解析とそこから抽出される幾何的関係が重要な意味をもった．散乱問題では高い不安定度をもつ分水嶺解が軌道の交通整理をしているわけだが，この不安定解が安定な解とも大域的にはつながっていることも徐々に明らかになってきている．今後にやるべき方向としては第一には

- 偏微分方程式の周期解や2次元解をも含めた大域的枝の探索方法の開発

があろう．これは地道で時間のかかる作業であるが，電波望遠鏡や原子間力顕微鏡の開発に相当する重要な仕事である．同時に精度保証を伴う理論の枠組みも整備されていけば非常に強力な道具となる．人間の想像力はすばらしいものがあるが，計算機はそれと相補的であり，よきパートナーとなり得る．当然のことながら，1つ1つの事実の集積なくして全体像を考えることはできない．一方でこれらの手法で得られた結果は多くの新たな理論解析を要請する．例えば，4節の最後に述べたように，単独定常パルスの極限点，周期定常パターンの極限点の集合の最小値，そして定数平衡点のホップ分岐の3つの位置関係が時空カオスの出現と消滅に深く関わるが，これらは一定の条件下で厳密に計算可能である．そのときこれらは具体的にどう関連し合っているのであろうか？ すなわち一般的に

- 大域的な枝の位置関係を特徴付ける量の間にどのような内的関連があるのか．

さらにこれとも関係するが，

- 大域的な位置関係をある特異点の開折に帰着することが可能な場合はどんなときか．

という問題がある．一例としては自己複製で述べたような階層構造をそのダイナミクスを保ったまま，なんらかの特異点の近傍のダイナミクスに帰着できるかということである．言い換えると組織中心 (organizing center) が見つけられるかとも言える．これらはどれも簡単ではないが，真に非平衡なパターンダイナミクスの理解を目指す上では避けて通れない問題と思われる．

文　献

[1] M. Bode, A.W. Liehr, C.P. Schenk and H.-G. Purwins, Interaction of dissipative solitons: particle-like behaviour of localized structures in a three-diffusion system, Physica D, **161** (2002), 45–66.

[2] E. J. Doedel, A. R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B. Sandstede and X. Wang, AUTO97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont), ftp://ftp.cs.concordia.ca/pub/doedel/auto, 1997.

[3] C. Elphick, E. Meron and E.A. Spiegel, Spatiotemporal complexity in traveling patterns, Phys. Rev. Lett., **61** (1988), 496–499.

[4] C. Elphick, E. Meron and E. A. Spiegel, Patterns of propagating pulses, SIAM J. Appl. Math., **50** (1990), 490.

[5] P. Gray and S.K. Scott, Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: oscillations and instabilities in the system $A+2B \to 3B$, $B \to C$, Chem. Eng. Sci., Vol. 39 (1984), 1087–1097.

[6] S.-I. Ei, The motion of interacting pulses in reaction diffusion systems, J. Dynam. Differential Equations, **14** (2002), 85–137.

[7] S.-I. Ei, M. Mimura and M. Nagayama, Pulse-pulse interaction in reaction-diffusion systems, Physica D, **165** (2002), 176–198.

[8] S.-I. Ei, M. Mimura and M. Nagayama, Dynamics of spot-solutions in reaction diffusion systems in two dimensional space, preprint.

[9] S.-I. Ei, Y. Nishiura and K.-I. Ueda, 2^n-splitting or Edge-splitting –A Manner of splitting in dissipative systems, Japan J. Indust. Appl. Math., **18**, no. 2 (2001), 181–205.

[10] Y. Hayase and T. Ohta, Sierpinski Gasket in a Reaction-Diffusion system, Phys. Rev. Lett., **81**, no. 8 (1998), 1726.

[11] K. Krischer and A. Mikhailov, Bifurcation to traveling spots in reaction-diffusion systems, Phys. Rev. Lett., **73** (1994), 3165–3168.

[12] S. Kawaguchi and M. Mimura, Collision of traveling waves in a reaction-diffusion system with global coupling effect, SIAM J. Appl. Math., **59** (1999), 920–941.

[13] K. J. Lee, W. D. McCormick, J. E. Pearson and H. L. Swinney, Experimental observation of self-replicating spots in a reaction-diffusion system, Nature, **369** (1994), 215–218.

[14] Y. Nishiura and D. Ueyama, A skeleton structure of self-replicating dynamics, Physica D, **130** (1999), 73–104.

[15] Y. Nishiura and D. Ueyama, Spatio-temporal chaos for the Gray–Scott model, Physica D, **150** (2001), 137–162.

[16] Y. Nishiura, K.-I. Ueda and T. Teramoto, Scattering and separators in dissipative systems, submitted.

[17] Y. Nishiura, K.-I. Ueda and T. Teramoto, Dynamic transitions through scattors in dissipative systems, to appear in Chaos.

[18] 西浦廉政, 非線形問題 I –パターン形成の数理–, 岩

波講座・現代数学の展開, **7**, 岩波書店, 1999.

[19] 西浦廉政, 数学と化学・生物学 ―自己複製と自己崩壊のダイナミクスをめぐって―, 数学, **52**, no. 4 (2000), 404–416.

[20] Y. Nishiura, Far-from-equilibrium Dynamics, Amer. Math. Soc., 2002.

[21] 西浦廉政, 自己複製と自己崩壊のパターンダイナミクス, 岩波講座・物理の世界, 岩波書店, 2003.

[22] 太田隆夫, 非平衡系の物理学, 裳華房, 2000.

[23] J. E. Pearson, Complex patterns in a simple system, Science, Vol. 216 (1993), 189–192.

[24] C. P. Schenk, M. Or-Guil, M. Bode and H.-G. Purwins, Traveling pulses in three-component reaction-diffusion systems on two-dimensional domains, Phys. Rev. Lett., **78** (1997), 3781–3784.

(2003 年 2 月 3 日提出)

(にしうら やすまさ・北海道大学電子科学研究所)