

- [K 1] P.B. Kronheimer, ALE gravitational instantons, thesis, Oxford Univ.,(1986).
- [K 2] P.B. Kronheimer, The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, J. of Diff. Geom. **29**(1989), 665-683.
- [K 3] P.B. Kronheimer, A Torelli-type theorem for gravitational instantons, J. of Diff. Geom. **29** (1989), 685-697.
- [K-N] P.B. Kronheimer and H. Nakajima, Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons, Math. Ann. **288**(1990), 263-307.
- [Ma] I.G. Macdonald, The Poincaré polynomial of a symmetric product, Proc. Camb. Phil. Soc. **58**(1962), 563-568.
- [Mu] S. Mukai, On the moduli space of bundles on $K3$ surfaces, I, in Vector Bundles on algebraic varieties, Oxford Univ. Press, (1987), 341-413.
- [N 1] H. Nakajima, Removal singularities for Yang-Mills connections in higher dimensions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, **34**(1987), 299-307.
- [N 2] H. Nakajima, Hausdorff convergence of Einstein 4-manifolds, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, **35**(1988), 411-424.
- [N 3] H. Nakajima, Moduli spaces of anti-self-dual connections on ALE gravitational instantons, Invent. Math. **102**(1990), 267-303.
- [N 4] H. Nakajima, Homology of moduli spaces of instantons on ALE spaces I, J. Diff. Geom. **40** (1994), 105-127.
- [N 5] H. Nakajima, Instantons on ALE spaces, quiver varieties and Kac-Moody algebras, Duke Math. **76**(1994), 365-416.
- [N 5.5] H. Nakajima, Quiver varieties and Kac-Moody algebras, Duke Math. **91**(1998), 515-560.
- [N 6] H. Nakajima, Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces, Ann. of Math. **145**(1997), 379-388.
- [N 7] 中島啓, 弦双対性の示唆する 22 世紀の幾何学母空間, 保型関数, 数学セミナー, 8月号(1997), 33-37.
- [N 8] 中島啓, 曲面上の点の Hilbert 概型と Heisenberg 代数, 数学, **50**(1998), 385-398.
- [N 9] H. Nakajima, Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces, Univ. Lect. Ser. **18** AMS, 1999.
- [N 10] H. Nakajima, Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebra, preprint math. QA/9912158.
- [N 11] 中島啓, 本号掲載の論説.
- [S-W] N. Seiberg and E. Witten, Electric-magnetic duality, monopole condensation and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory, Nucl. Phys. **B426**(1994), 19-52.
- [U] K. Uhlenbeck, Removable singularities for Yang-Mills fields, Comm. Math. Phys. **83**(1982), 11-30.
- [V] C. Vafa, Instantons and D -branes, hep-th/9512078.
- [V-W] C. Vafa and E. Witten, A strong coupling test of S -duality, Nucl. Phys. **431**(1994), 3-77.
- [Ya] S-T. Yau ed., Seminar on Differential Geometry, Ann. of Math. Studies **102**(1982), Princeton Univ. Press.
- [Yo] K. Yoshioka, The Betti numbers of the moduli space of stable sheaves of rank 2 on \mathbf{P}^2 , J. reine. angew. Math. **453**(1994), 193-220.

(2000年6月13日提出)

(おおた ひろし・名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

数学と化学・生物学—自己複製と自己崩壊のダイナミクスをめぐって

西 浦 廉 政

1 序

パターン形成理論はその名が示すとおり, 非線形・非平衡系に現れるさまざまな散逸構造(パターン)の形成過程やダイナミクスに関わる数学理論の総称である。ゆらぎから生じる非自明な構造の生成を説明する分岐理論, パルス解などの大振幅解に対しても有効な幾何学的特異摂動論およびこれらに関わる力学系理論, 界面運動の記述に不可欠な粘性解理論などの非線形偏微分方程式論, 時空間の自己相似的パターンの解析に有効なくりこみ群などのスケーリング理論の考え方, カ

オスの振舞に対する統計的手法, パーコレーションの解析に有効な確率論的手法, そして複雑な時空パターンを再現する上で不可欠なさまざまな数値解析の方法などが関わってきた(例えば[13]参照)。これらは各々独自の発展をしてきたわけであるが, 散逸構造の解明という課題が恰好の材料を与え, 理論の発展に酵素的役割を果たしてきたのも事実である。その意味ではパターン形成に現れるさまざまな現象が直接, 数学理論の形成に寄与したわけではむしろなく, 発展する「場」を与えたというべきであろう。この実験と理論のつながりは重要である。実際, 反応と拡散のみによりゆらぎから空間非一様なパターンが生成されるというシナリオは50年代に既に Alan Turing により理論的に示されたが, 実験的に非平衡化学反応系において確認されるには90年代はじめまで待たなくてはならなかった(例えば[3])。それは表面張力や対流などの流体力学的効果を排除するのが難しかったことによる。この実験的成功が起爆剤となり, それまで予想だにできなかった自己複製解をはじめとする多くの動的なパターンが実験室, そして計算機シミュレーションによって発見され, 反応拡散系の新たなページが開かれた。それらの多くはこれまでの手法では理解が困難なものも多いが, 同時にそれは新たな理論の発展の萌芽にもつながると期待されるものである。この短い解説ではその一端を紹介したいと思う。

問題意識をはっきりさせるため, パターン形成理論のこれまでの発展を次のような切口で整理してみよう。以下では定常解, 周期解あるいはカオス解などのある特定の解のクラスを「Object」とよぶことにする。

1. Object の発見物語
2. Object 間の弱い相互作用
3. Object 間の強い相互作用

むしろこれらの3段階は独立ではなく, 螺旋的に発展してきたわけである。実際第2, 第3段階は第1段階を踏まえてはじめて考察可能となる。第1段階は定常解, 周期解, 進行波解, カオス解等の数値的発見, 厳密な構成そしてそれらの安定性, 分岐解析へとつながるさまざまな Object の発見物語とその諸性質の解析である。これは Turing の拡散不安定化(diffusion-driven instability)のアイデアが提唱されて以来, 綿々と続いている基本段階である。近年の一つの流れは第1段階で構成した Object が複数存在するときそれらの間の相互作用ダイナミクスを考えようというものである。相互作用をしているときの解の状態が Object のコピーを重ね合わせたもので良く近似されるならばそれは「弱い」相互作用とよぶことにする(第2段階)。Object が自分の identity を失わずに, 尾(tail)を通してのみ相互作用している状態といえる。フロントが複数存在するときの超微速運動, 局在パルスや渦解が十分離れているときの運動はその典型例である。第3段階の「強い」相互作用はそれによりパターンの identity が失われてしまうものをいう。FitzHugh-Nagumo 方程式の進行パルス解の対消滅(annihilation)は古くから知られている例である。近年実験室, あるいは計算機で発見された多くの解もこのカテゴリーに属する。例えば図1の自己複製パターン(self-replicating pattern)はその典型例である。これは一つの定常パルス解から出発して次々と自分と同じコピーを作り出すプロセスであり, 最後には領域全体を埋め尽くす。ここで問題にしたいのは漸近挙動ではなく, そこにいたる分裂のダイナミクスである。すなわち途中の遷移ダイナミクスに興味がある。しかしこのような強い相互作用は解の大変形を伴うために, その記述は難しく, 第1, 2段階で開発された方法も有効ではない。それでは何をてがかりにすればよいのであろうか?

ヒントは図1をよく見れば、有限時間ではあるが1山パルス、2山パルス型定常解に近い形を軌道は通過していることにある。従ってそれらの定常解はアトラクターではないがなんらかの役割を果たしていると考えられる。つまり軌道の無限次元空間における動く道筋と定常解の関わり方を明らかにする必要がある。これが本解説の主題となる。

さて以上に述べた2種類の相互作用は現実のダイナミクスにおいては共存する。実際、図1における自己複製過程においても、分裂と分裂の間では互いに「反発」する弱い相互作用が支配的となっている。そして一定以上離れた後、はじめて分裂し始める。時間スケールで見ると、一般に弱い相互作用はゆっくりとした「slow」タイムスケールであり、強い相互作用はすばやい「fast」スケールとなる。このスケールの違いを利用して弱い相互作用に対しては、なんらかの摂動的手法が有効であり、ダイナミクスを支配する不変多様体を構成することも一般に可能となる([8])。他方強い相互作用の場合には現在のところ理論的に知られていることはほんのわずかである([9]参照。比較定理が成り立つスカラー方程式の場合にはフロントの対消滅についてかなりわかっている[12])。さらに弱い相互作用と強い相互作用はどのように関連しているかについては全く未開拓と言ってよい。ここで最初に我々が考えたい問題は次である。

問題1 自己複製パターンを駆動している数理的機構はなにか？

既に述べたように問題を困難にしているのは、これが解の大変形を伴う遷移ダイナミクスに関わってくるからである。アトラクターそのものではなく、そこに至る途中経過が重要となり、摂動的アプローチとは異なり、その軌道の良い第1近似を構成することは問題全体を解くこととほぼ同等になってしまう。そのように振舞わせているガイド役はなんだろうか？ここで無限次元空間における大域分岐解析が重要な役割を果たすこととなる。これには数値分岐解追跡ソフトウェアAUTO([4])が不可欠である。AUTOによる解析が有用となるのは不安定解とそれに付随する不安定多様体の挙動について多くの情報を与えてくれ、それが無限次元空間における軌道の道筋と定

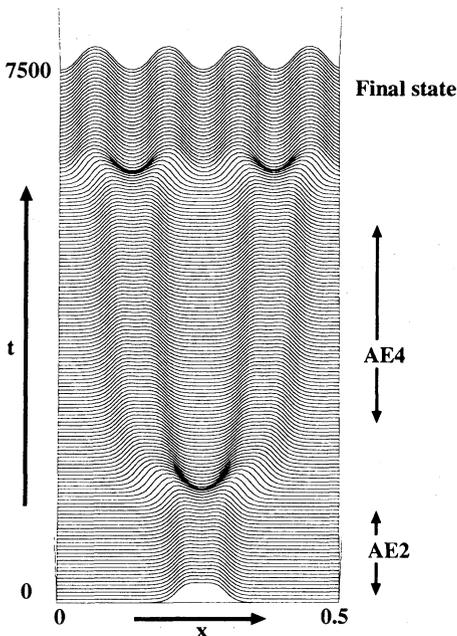


図1: Gray-Scott モデルにおける1次元自己複製パターン ($F=0.04$, $k=0.06075$, $L=0.5$, $N=500$). ここで L は区間長, N は分点数. 図では v のみの時空間変化を描いている.

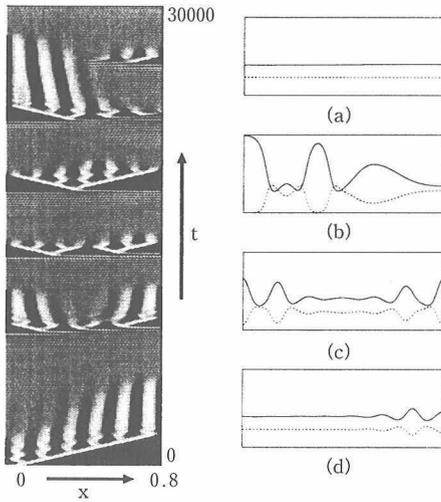


図 2 : Gray-Scott モデルにおける時空カオス ($D_u=2 \times 10^{-5}$, $D_v=10^{-5}$, $F=0.035$, $k=0.05632$ および $L=0.8$). 右のスナップショットは解がほぼ定常状態 P から出発し, 次にいくつかの部分区間で $(u, v)=(1, 0)$ に落ち, そこから自己複製波が進み, 定常パターンがしばらく現れ, そしてそれが自己崩壊して, 再び P に戻る一つのサイクルを示している.

常解の関わり方を明らかにしてくれるのである (AUTO は元々常微分方程式用に作られたものであり, そのまま偏微分方程式に適用してもうまく動かない. たとえ動いてもスパゲッティ状の複雑な網目が得られるだけで, 情報を的確に取り出すには技術的な問題をいくつか克服する必要があることを注意しておく).

さて図 1 では最終的には安定な定常解に落ち着いていたが, もしこの受け皿の解が消滅するようなことがおこれば軌道はどのように振舞うであろうか? 実際パラメータをそのように調節することは可能であり, 図 2 はそのときの様子である. 自己複製して, 空間周期的なパターンが生成されるがそれらは永続せず, しだいに消滅し, ほとんど一様な状態にもどり, そこから幾つかのプロセスを経てまた自己複製パターンが生まれるということを繰り返す. それは時間周期的ではなく, いわゆる時空カオス (spatio-temporal chaos) とよばれるものとなる. 時空カオスの理解には通常, 統計的手法, 例えば有限の相関時間および相関距離をもつ, あるいは Lyapunov 指数やベクトル解析がよく用いられる. それらは重要な情報を与えてくれるが, パターン形成という空間構造に着目する立場からはやや不満足である. それは基本的にある有限次元空間に射影して, (有限次元)力学系理論での成果を適用するという方法である以上, 空間構造の情報をそのまま保持することは難しい. 考えるべき問題は次のように述べられる.

問題 2 パラメータを変化させる時, いつ時空カオスがおこり (onset), いつそれが消滅する (terminate) かの判定法を与えよ. また軌道はどのような空間パターンを経巡るかを決定せよ.

上に述べた無限次元空間での大域分岐解析によるアプローチはこの問題に対しても有効であり, かつ空間パターンの情報を与えてくれる. 最後になったが, 以下で述べる内容は上山大信との共同研究 [14] および [15] に基づく.

2 Gray-Scott モデルとそのダイナミクス

自己複製パターンは 90 年代の初め FIS あるいは CIMA という化学反応系において最初発見され, その後数値実験においても確認された ([11], [17], [18], [19], [20]). その時に採用された数理モデルが Gray-Scott モデルとよばれる次の反応拡散系である.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u - uv^2 + F(1-u), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v + uv^2 - (F+k)v. \end{cases} \quad (1)$$

この系は多様なダイナミクスをもつ。実際、拡散係数を $D_u = 2 \times 10^{-5}$, $D_v = 10^{-5}$ と固定し、パラメータ (k, F) を変化させて得られた相図が図3である。ここで初期値としては有限振幅の局在化した階段関数の摂動を定数状態 $(1, 0)$ に与えた。 $(1, 0)$ は偏微分の意味でも安定な解であり、微小摂動によっては変化しないことに注意しよう。) 図3に現れている2本の曲線は下が定数解のサドル・ノード分岐線で、左へ横切ると $(1, 0)$ 以外の2つの定数解 P (ノード)と Q (サドル)が現れる。上は P のホップ分岐線である。これら2本は $(k, F) = (1/16, 1/16)$ で合流し、そこで二次元2の特異点となる(Bogdanov-Takens点とよばれる)。これら2本の分岐線の近傍領域に多くの興味あるダイナミクスが存在し、同時にダイナミクス間の転移がはっきりとみることができる。実際、番号3と書いたあたりに F を固定し、 k を小さくしていくと、最初定常パルス解が現れ、次に自己複製パターン、さらに時空カオスと変遷していく。そしてこれらの転移は突然おこるように見える。

どのようにしてこれらのダイナミクスが生じ、なぜこれらの転移がおきるのか、それらの数理的機構を考えよう。とくにここでは前節で述べた第3段階に属するダイナミクスの中で最も興味ある自己複製パターン(領域3)と時空カオス(領域4)への転移に焦点をあてることにする。実はこれらの転移機構を明らかにすることがそれらのダイナミクスそのものを駆動する仕掛けをも同時に理解することにつながるのである。これらの転移が自明でないのは、通常分岐理論で説明できるもの—例えば定常パルス解から進行パルス解への転移—のように、あるアトラクターから別のアトラクターへとパラメータに連続的に推移していくものではないからである。実際、後に述べるように真に大域的な構造が裏に隠れており、その意味で摂動的あるいは、局所的理論のみではそれらを明らかにするには限界がある。これは現時点では必然的に計算機による解析を必要とするが、それはよくある傍証的な数値シミュレーションではなく、それによりどのような数学の枠組を作り得るかに ついての重要な示唆が得られるものである。というより真に平衡から遠いパターンダイナミクスを理解するためには想像力の助けとして計算機という伴侶が不可欠である。さて以下に述べる自己複製過程あるいは時空カオスにおいてはいずれも秩序構造が崩壊するというプロセスを含んでいる。逆説的ではあるが崩壊過程がなければこれらのダイナミクスは成立し得ない。従って崩壊過程がどのような機構によって駆動されているかをまず考えよう。

2.1 自己崩壊

通常パターン形成という場合その名が示すとおり、一様な状態からゆらぎを経て自発的に空間非一様なパターンが作られて行くのが主なテーマであった。しかし作られたものが壊される過程がないと物事は次々と変化して行かない。それでは散逸構造が自己崩壊するとはどのようなことなのであろうか? それには2つの場合が考えられる。一つは他との相互作用なくして自分自身で自発的に壊れてしまう場合であり(これを自己崩壊(self-destruction)とよぶ)、もう一つは相手(しかし多くの場合は自分のコピー)との強い相互作用で壊れる場合である。後者の典型例は次の神経パルスの伝搬を記述する FitzHugh-Nagumo 方程式(2)の進行波パルスが衝突するときの対消滅である(但し抑制因子 v の拡散係数 D は0か小さい場合)。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + u(1-u)(u-a) - v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D\nabla^2 v + \epsilon(u - \gamma v). \end{cases} \quad (2)$$

ここでは前者の自己崩壊に焦点をあてる。一言でいえば自己崩壊はサドル・ノード分岐の余韻でおこる。FitHugh-Nagumo 方程式のパルスは後者の典型例であると上で述べたが、実は抑制因子の拡散係数 D が大きくなるとこのサドル・ノード分岐の余韻により自己崩壊をもおこすのである。同じ方程式でもパラメータの値を変えることで2種類の崩壊が起きることに注意しよう。実際、 D

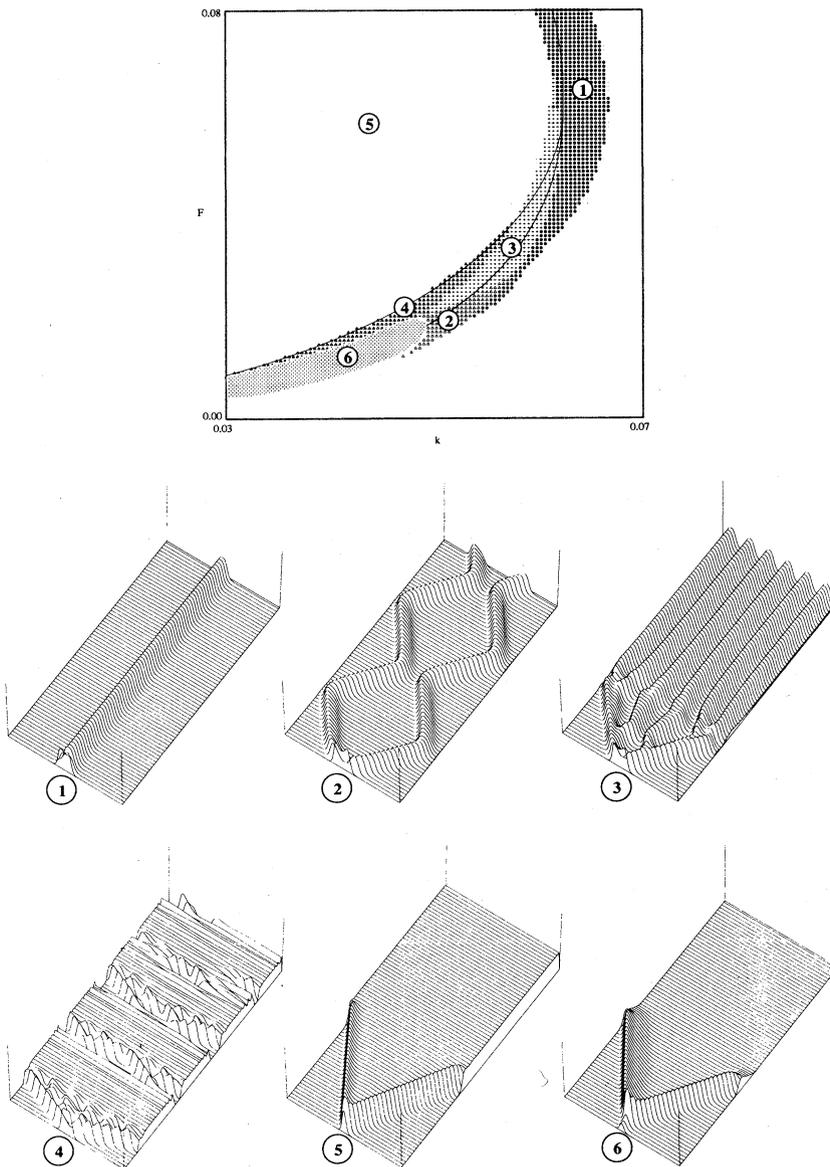


図 3: 境界条件はノイマン型を採用した。領域 1: 定在パルス, 領域 2: 進行パルス, 領域 3: 自己複製パターン, 領域 4: 時空カオス, 領域 5: フロント解(定数状態 P が $(1, 0)$ へ進む), 領域 6: 対消滅。

とともに進行パルス解の族は図4のようなサドル・ノード構造をもつことが知られている。このとき遅い不安定パルス解の不安定多様体は $(0,0)$ という自明解につながっている。ここで D をサドル・ノード分岐点より少し右に取り(それを $D=D^*$ と書こう), 初期値として階段状の有限振幅の摂動を与えると図5のように最初進行パルス形にまず整形し, そのまま伝搬するがしばらくすると止まり, そして減衰して消える。つまりサドル・ノード分岐の余韻と言っているのはサドル・ノード分岐点の解と自明解をつなぐヘテロクリニック軌道が間接的に $D=D^*$ での軌道の振舞いをコントロールしていることをいうのである(ベクトル場そのものはパラメータに連続的に依存する)。ただ注意すべきは $D=D^*$ での相空間にはサドル・ノード分岐もなければヘテロクリニック軌道もないので, そこだけをみているとながが駆動しているのかわからないのである。上に述べた特徴付け「サドル・ノード分岐の余韻」はいつどのように自己崩壊が起きるのかについて厳密な判定法を与える。すなわちいつ崩壊が起きるかはサドル・ノード分岐点の位置で与えられ, どの程度パルスの振舞いを持続するかは採用したパラメータの値と分岐点との距離が制御する。そして崩壊したあと最後にどこに落ち着くかはサドル・ノード分岐構造の不安定解の不安定多様体の行き先で決まる。むしろ最後の行き先は大域的な振舞いであり, 一般には厳密な理論判定は難しく, 数値的追跡に頼ることになる。

さて Gray-Scott モデルにおける自己崩壊をみよう。唐突ではあるが後との関係から12モード(1山=2モード)の定常解の自己崩壊を考えよう。AUTOでこの解を追跡すると図6のような分岐ダイアグラムが得られる。この場合もサドル・ノード分岐が存在し, 定数解(P 印の枝)からの sub-critical 分岐として生まれた12モード定常解の枝が反転してサドル・ノード構造を作っているのがわかる。分岐直後はこの枝と P が不安定多様体でつながっており, それがサドル・ノード分岐点まで延長されているのである。パラメータ k を k_{\min} より少し小さくとり, 初期値を12モードの cosine 関数を採用すると, 図7のようになる。一旦 cosine 関数から12モード定常解に直ちに整形し, しばらくその状態に留まり, やがて一様状態へと崩壊する。この場合の不安定解 U の不安定次元は1であり, それは定数解 P へとつながっている。cosine 形を多少乱した初期値から出発し

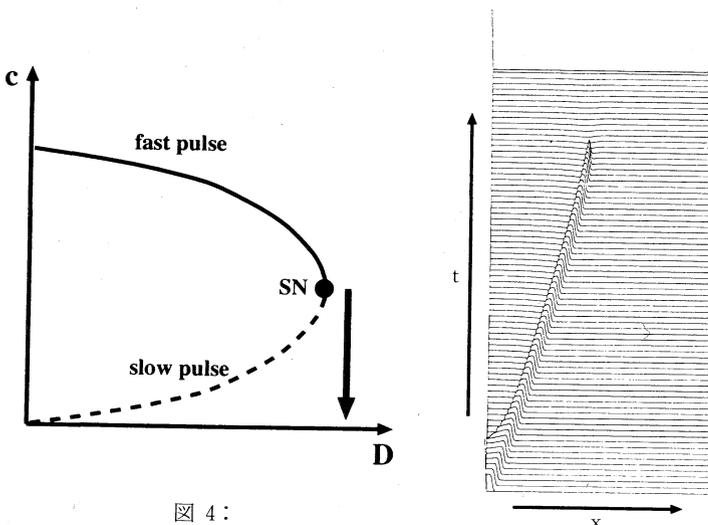


図 4:

図 5: 進行波パルスの自己崩壊。抑制因子 v の拡散の大きさを適当に大きくとれば, 最初パルスは進むがやがて止まり, そして消滅する。

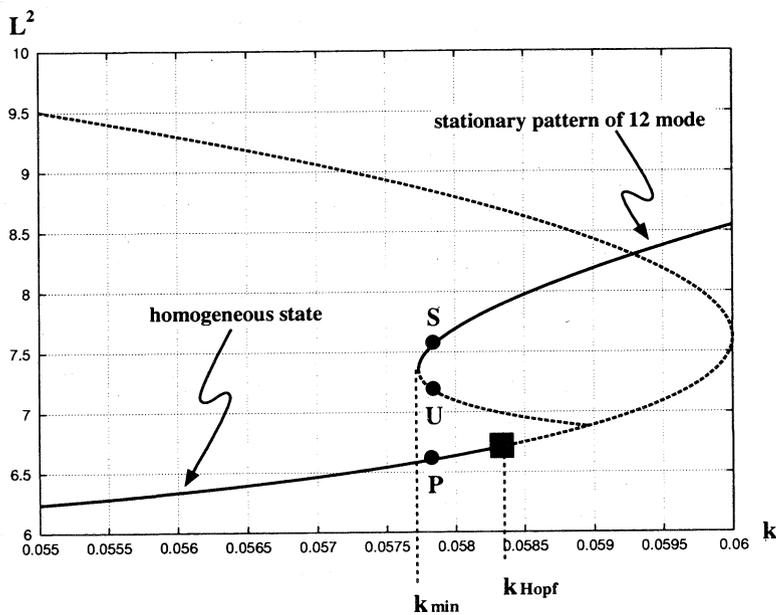


図 6: 定数解 P から分岐した 12 モードの枝がなすサドル・ノード分岐. k を $k_{\min} = 0.05773408$ より少し小さく取れば, 12 モード解の P への自己崩壊が起こる. 図 7 を見よ.

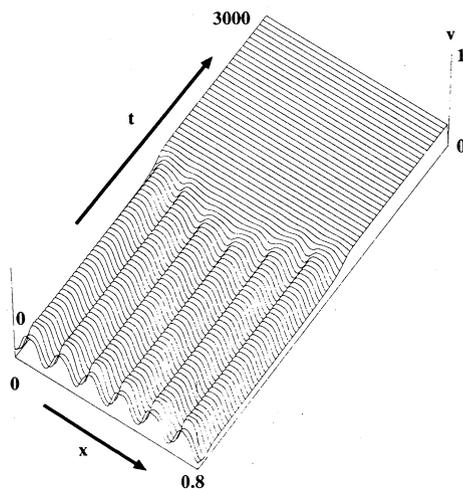


図 7: 初期値を cosine12 モードに取ったときの図 6 のサドル・ノード分岐点および P へとつながる不安定多様体の余韻. cosine 波形が一旦 12 モード解に整形してから P へと崩壊する.

でも一旦 12 モードに整形することは確認されており, サドル・ノード分岐点の解は遷移パターンとしての吸引領域は広い. しかし一般に不安定次元が 2 以上になると初期値に敏感に依存し, そのダイナミクスはかなり複雑となる. しかし基本的にはそのつながりが明らかにされれば, 複雑で遷移的なパターンダイナミクスもその全容が見えてくる可能性はある.

2.2 自己複製

自己複製ダイナミクスは図 1 のように次々と自分自身のコピーを生み出して行くプロセスであり, 自己崩壊とは全く逆の生成過程に見える. しかし以下の議論で見るように, それを駆動している機構「サドル・ノード分岐の階層構造」は実質的に自己崩壊のときに見た同じ機構を積み重ねたものになっているのである. まさにそうであるがゆえに自己複製と自己崩壊過程を同時に組み合わせ

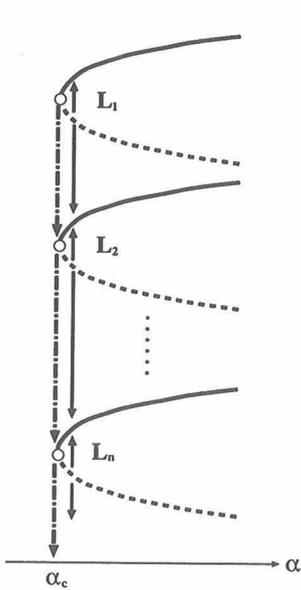


図 8: サドル・ノード分岐の階層構造。点線部分の枝は不安定であり、その不安定多様体は下層の安定な枝につながる。

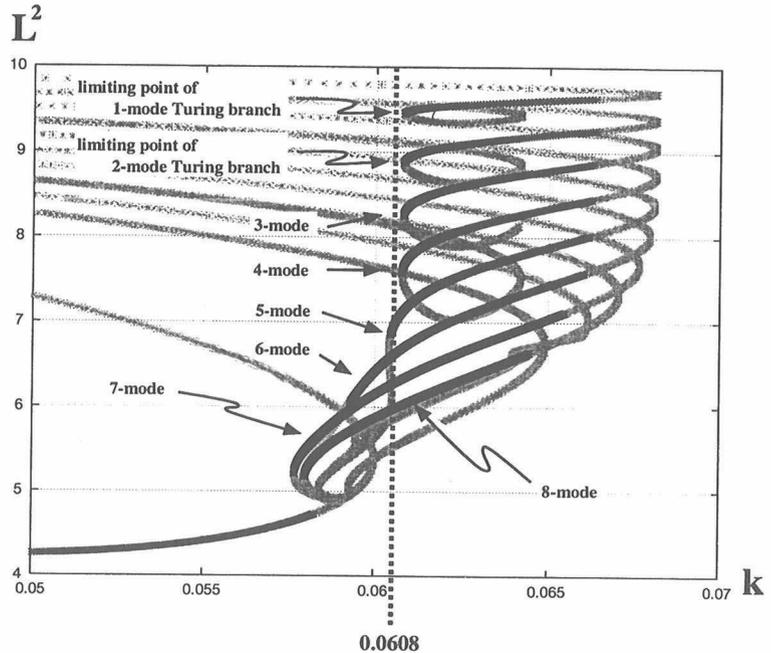


図 9: $F=0.04$, $L=0.5$, $N=100$ における分岐ダイアグラム。濃い実線は安定な、薄いグレーの実線は不安定な定常解を表す。4 モードまでのサドル・ノード分岐点の位置は $k=0.0608$ 付近に 1 直線に並ぶ。

せることが可能であり、その結果として後に見る時空カオスを生み出すことができるのである。上で同じ機構といったがそれは次のようなものである。自己崩壊の場合、不安定多様体の行き先が定数解であったが、自己複製の場合は山の数が増えた別の安定パルス解なのである。これが階層的に積み重なったものをサドル・ノード分岐の階層構造とよび(図 8 参照)、これにより次々と分裂していくプロセスが駆動される。不安定多様体に沿って、山の数が増えた次の安定解のサドル・ノード分岐点に向かう時がまさに分裂する時に対応する。

さてここまでは可能性としてのシナリオを書いたわけであるが本当にこのような構造が方程式の解構造に内包されているのであろうか？ 答えは Yes である。実際 Gray-Scott model において、図 1 に対応する分岐ダイアグラムが図 9 である。

モード数が大きいところでは領域の大きさが有限である影響が出て、サドル・ノード分岐点の位置がそろっていないが、5 モードあたりまではほぼ同じ位置にある。初期値を対称にとったので、2 モード→4 モード→8 モードという経路を軌道はとる。図 9 では k を固定したときの相空間の次元が無次元元のように描けないので、上から順番に不安定多様体がつながっているように錯覚するが、実はそのつながり具合は空間 1 次元でも相当複雑である。実際区間を広くとったとき、8 モードまで分裂したあと、16 モードになるわけではないのである。このことはより精密に議論できるがここでは触れない([9]参照)。

3 時空カオス

序に述べた問題 2 を考えよう。まず自分と同じパターンを次々と生み出す自己複製過程と作られたパターンが壊れる自己崩壊ダイナミクスをうまく組み合わせて、作っては壊し、そしてまた作る

というダイナミクスを構成できないかということを考えよう。図1では自己複製の後、安定な4山定常解に落ち着き、それ以後変化しない。もしこの定常解が自己崩壊の節で述べたようなサドル・ノード分岐をもつならばパラメータを調節することでこれを定常状態 P へと崩壊させることはできる。しかしそのとき P が安定ならばそこで止まり、経巡ることにはならない。従って時間発展が続くためには例えば P がサドル構造をもち、自己崩壊するときはその安定多様体に沿って P に近づき、その後、今度は不安定多様体に沿って再び空間パターンを作る方向に軌道が離脱していくようになっていないといけない。以上より求めたいダイナミクスを得るには次を調べる必要がある。

1. 自己複製と自己崩壊が同時におこり、かつそれらを繰り返すようなパラメータは存在するの
か？
2. P の安定および不安定多様体が上に述べたようなサドル構造になっているのか？

これらの問題に対しても分岐解の大域的な配置と安定性の変化は決定的役割を果たす。実際 $F=0.04$ と $F=0.035$ における定常解および定常解 P のパラメータ k に関する分岐ダイアグラムは図10のようになる(ここではわかりやすいように模式図でかいた。より詳しくは[15]を参照)。一見この2つは同じように見えるが大きな違いは k_{\min} と k_{Hopf} の位置関係にある。図からわかるように k_{\min} は定常解の枝のサドル・ノード分岐点の中で最小に位置するもので自己崩壊が起こるかどうかの分水嶺となる。 k_{Hopf} は定常解 P の Hopf 分岐点であり、ここで P は安定性を回復する。どちらの場合も図10の矢印の破線部分では自己複製パターンを、太線部分では自己崩壊ダイナミクスが観察される。しかし(a)では自己崩壊がおこる $k < k_{\min}$ に k をとると崩壊後の P は安定であり、軌

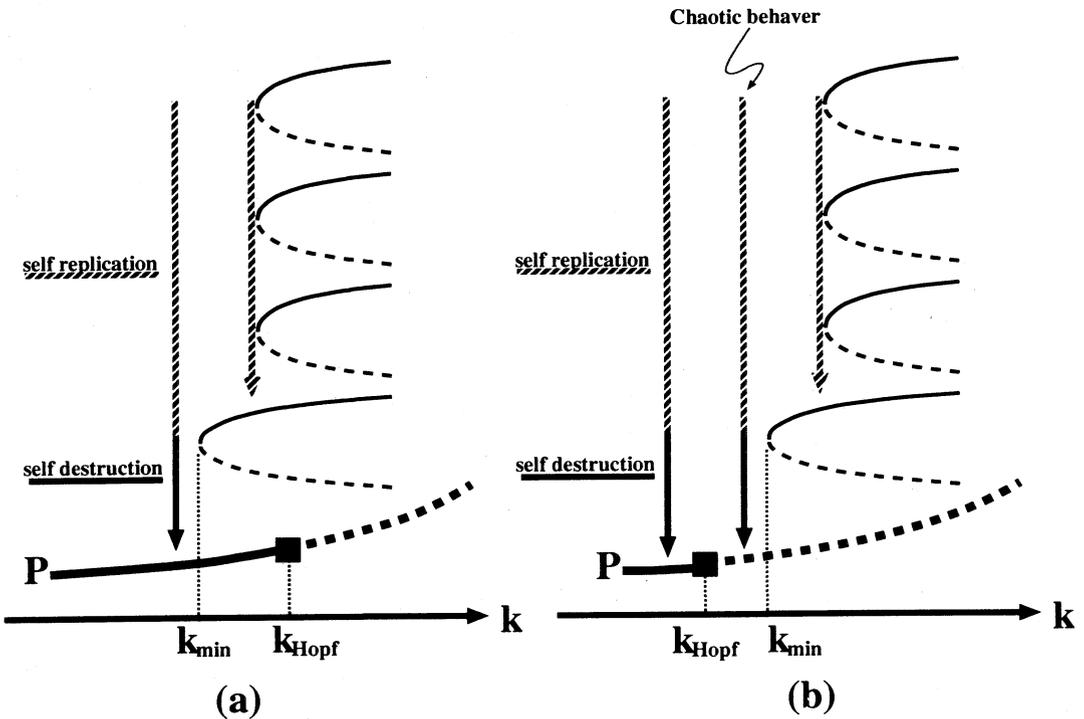


図10: (a) $F=0.04$. $k_{\min} < k_{\text{Hopf}}$ なので自己複製および自己崩壊はおこるが、 P は安定なので、その後の時間発展はない。(b) $F=0.035$. $k_{\min} > k_{\text{Hopf}}$ が成り立ち、自己崩壊の後、 P が不安定となるパラメータ k をとることができる。そこでは時空カオスが存在する。

道は P で止まってしまう。一方 (b) では $k_{\min} > k_{\text{Hopf}}$ なので $k_{\min} > k > k_{\text{Hopf}}$ と k をとれば、そこでは P は不安定なので自己崩壊した後も軌道はそこで止まらず次々と経巡ると考えられる。実際、 $k = 0.05632$ という値をとれば、解は図2のように振舞う。すなわち時空カオスが出るかどうかは、 $k_{\min} = k_{\text{Hopf}}$ が臨界値となる。実際、2つの曲線 $k = k_{\min}(F)$ および $k = k_{\text{Hopf}}(F)$ をパラメータ空間 (k, F) を描くと図11のようになり、2節の図3の時空カオスが出現および消滅する場所(三日月形領域)と重ね合わせるとピッタリと合う。図11の交点 G が $k_{\min} = k_{\text{Hopf}}$ に対応する。これで問題2の最初の疑問は解けた。ここで述べる余裕はないが、実は図3の他の転移境界も同様な特徴付けが可能なのである。

図2をみれば秩序構造が現れたり消えたりする様子がよくわかる。この空間秩序の変遷の種はどこからきているのであろうか？ 実際 $k = k_{\min}$ では形式的ではあるが図12に示したような R 上のヘテロクリニックサイクルが形成されていることがわかる。問題2の後半「時空カオスの軌道はどの空間パターンを経巡っているのか？」という問いに対する答えがこれになっている。このヘテロクリニックサイクルを unfold することで時空カオスが得られる。これは有限次元のカオス理論における homoclinic tangle を思い起こさせる。

以上の考察よりここで述べた時空カオスはその出現点 (onset) 付近において低次元常微分方程式系のカオスに縮約されるというものではなく、大域的な解構造を踏まえてはじめて特徴付け可能なものである。

さてこの節で議論したことは残念ながら定理という形ではまだ述べることはできない。実際ヘテロクリニックサイクルの構成要素の一つ： $(u, v) = (1, 0)$ と空間周期構造をつなぐヘテロクリニック軌道の存在一つをとっていても厳密な証明はまだできていない。また数値実験でみている時空カオスは有限区間で起こっており、そこでは上の形式的なヘテロクリニックサイクルの存在すら言えない。結局、無限区間から有限区間への摂動とパラメータ k の2方向に摂動していることになる。この摂動により上で述べたヘテロクリニックサイクルがどのようにして時空カオスに変わるのかその詳細はよくわかっていない。それにもかかわらずここでのアプローチはどのような数学的枠組で

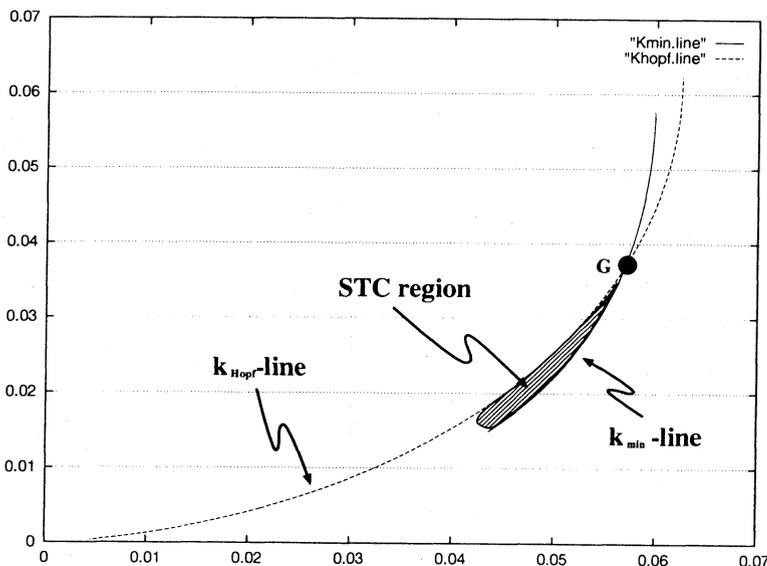


図11: 点線が $k = k_{\text{Hopf}}$ -曲線、実線が $k = k_{\min}$ -曲線。これらは一点 G で交わり、そこで囲まれた領域 (spatio-temporal chaos region) で時空カオスが現れる。

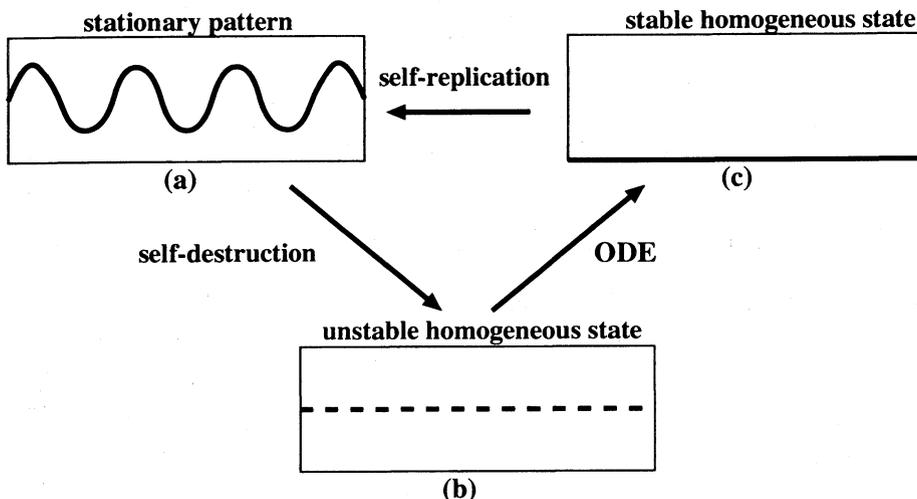


図 12: $k = k_{\min}$ では R 上で形式的に定常解, 不安定定数解 P , 安定定数解 $(u, v) = (1, 0)$ を巡るヘテロクリニックサイクルを構成できる. 実際の有限区間で観察される時空カオスでは P から $(1, 0)$ へ移るとき, 区間全体で一様に行くのではなく (真に $(1, 0)$ へ落ちればそこから軌道は出れない), 必ず自己複製波が生み出される $(1, 0)$ 以外の部分が残っている. 実際, 上のサイクルはある部分区間に着目すれば観察できる. 図 2 を見よ.

考えれば時空カオスなるものをパターン形成の立場からより理解できるかという一つの提案にはなっていると思われる. これがさらに今後の厳密理論の橋渡しになればと期待している.

4 おわりに

散逸系のダイナミクスにおいて次々と複雑に遷移していくパターンがどのような数学的機構で駆動されているのか明らかにすることはこれまで極めて困難であった. それは数値計算のレベルに限定しても, 上で述べた分岐解の大域的な構造を偏微分方程式系に対して明らかにすることが可能となったのはごく最近のことだからである. 序で述べた第 1 段階の Object の分類表の作成は基礎データとして極めて重要であり, またそれなくしてはなにも語れないのであるが, 厳密性は多少譲るとしても, それらの解が無限次元の中で微妙に組合されることで複雑ではあるが生き生きとしたダイナミクスがどのように形作られるのかを理解することもこれからの方向として興味がある. 前節までに述べたことはその方向におけるまだ第一歩にすぎない.

文 献

[1] M. Argentina, P. Coullet and L. Mahadevan, Colliding waves in a model excitable medium: preservation, annihilation, and bifurcation, PRL, Vol.79(1997)2803-2806.

[2] P. Gray and S.K. Scott, Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: oscillations and instabilities in the system $A+2B \rightarrow 3B, B \rightarrow C$, Chem. Eng. Sci. Vol. 39(1984)1087-1097.

[3] P. De Kepper, J.J. Perraud, B. Rudovics and E. Dulos, Experimental study of stationary turing patterns and their interaction with traveling waves in a chemical system, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.4, No.5(1994)1215-1231.

[4] E.J. Doedel, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B. Sandstede and X. Wang, AUTO97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with Hom Cont), ftp://ftp.cs.concordia.ca/pub/doedel/auto, (1997).

[5] A. Doelman, T.J. Kaper and P.A. Zegeling, Pattern formation in the one-dimensional Gray-Scott model, Nonlinearity, Vol.10(1997)523-563.

[6] A. Doelman, R.A. Gardner and T.J. Kaper

- Stability analysis of singular patterns in the 1-D Gray-Scott model: A matched asymptotic approach, preprint.
- [7] A. Doelman, W. Eckhaus and T.J. Kaper, Slowly-modulated two pulse solutions and pulse splitting bifurcations, preprint.
- [8] Shin-Ichiro Ei, The motion of weakly interacting pulses in reaction diffusion systems, preprint 1999.
- [9] Shin-Ichiro Ei, Yasumasa Nishiura and Bjoern Sandstede, Pulse interaction approach to self-replicating dynamics in reaction diffusion systems, preprint 2000.
- [10] K.J. Lee, W.D. McCormick, J.E. Pearson and H.L. Swinney, Experimental observation of self-replicating spots in a reaction-diffusion system, Nature, Vol.369(1994)215-218.
- [11] K. J. Lee and H.L. Swinney, Lamellar structures and self-replicating spots in a reaction-diffusion system, Phys. Rev. E, Vol.51(1995) 1899-1915.
- [12] Y. Morita and Y. Mimoto, Collision and collapse of layers in a 1D scalar reaction-diffusion equation, preprint, 1999.
- [13] 西浦廉政, 非線形問題 I -パターン形成の数理-, 岩波講座・現代数学の展開 7, 岩波書店(1999).
- [14] Yasumasa Nishiura and Daishin Ueyama, A skeleton structure of self-replicating dynamics, Physica D, **130**(1999)73-104.
- [15] Yasumasa Nishiura and Daishin Ueyama, Spatial-temporal chaos for the Gray-Scott model, Preprint 2000.
- [16] E. Otto, Chaos in dynamical systems, Cambridge Univ. Press(1993).
- [17] J.E. Pearson, Complex patterns in a simple system, Science Vol.216(1993), 189-192.
- [18] V. Petrov, S.K. Scott and K. Showalter, Excitability, wave reflection, and wave splitting in a cubic autocatalysis reaction-diffusion system, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A, Vol.347(1994) 631-642.
- [19] K.E. Rasmussen, W. Mazin, E. Mosekilde, G. Dewel and P. Borckmans, Wave-splitting in the bistable Gray-Scott model, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.6, No.6(1996) 1077-1092.
- [20] W.N. Reynolds, J.E. Pearson and S. Ponce-Dawson, Dynamics of self-replicating patterns in reaction diffusion systems, Physical Review Letters. Vol.72, No.17(1994), 1120-1123.
- [21] W.N. Reynolds, S. Ponce-Dawson and J.E. Pearson, Self-replicating spots in reaction-diffusion systems, Physical Review E, Vol.56, No.1(1997), 185-198.

(2000年4月10日提出)

(にしうら やすまさ・北海道大学電子科学研究所)

書 評

Dusa McDuff and Dietmar Salamon: Introduction to Symplectic Topology,

Claredon Press, Oxford, 1994年, Second Edition 1998年, 486 ページ.

小 野 薫

本書は、両著者が、それぞれの大学などでの講義の経験をもとに書かれた symplectic topology の入門書である。1980年代半ばの Gromov の仕事を契機にこの分野に関心を持つ人も増えているので、入門書を待ち望む声があったものと思われる。この本の出版に前後して、数冊の入門書が出されている[A-L], [H-Z], [swiss]. [H-Z](この本は大変良く書かれていておすすめである)が、動機付け、方法論として Hamilton 力学系、特に周期解の存在問題からの symplectic topology への approach をしているのに対し、本書は、全般的な入門書を目指していて、さまざまな側面をできるだけ少ない予備知識で self-contained に書ける範囲で書かれている。(焦点を絞って、 J -holomorphic curves については、同じ著者達がもう一冊の本を書いており、「数学」にも高倉樹氏の書評が載せられている。)この分野で一線の研究を続けている著者達書いているだけあって、全般的に良く書かれている。一方で、通して見た印象としては、少し長過ぎる感がある。書かれている証明を追うよりも、読者が自分で考えた方が良いところもあるが、他の方々はどう思われるだろうか?(原稿を練り上げた著者には失礼な書き方になってしまったかもしれない。以前、本書を眺