非線形科学は新たな世界観を与えうるか

北海道大学電子科学研究所
西浦廉政

1　誤った決定はなぜ成されるのか

数学は時代に先んじる世界観を常に生み出してきた．占星術に伴うプトレマイオスの調和的な円の世界観からニュートン的世界観を経て現代のカオス・フラクタル的自然観にいたるまで幾度かコペルニクス的転回をもたらしてきた．実際ニュートン的描像ではどんな複雑なものも拡大すれば線形近似可能であるが，フラクタル的視点はいくら拡大しても全体のミニチュアがそこに存在し，部分と全体，自己と非自己が分離不可能な世界を提示する．しかし真に数学が偉大であるのは「目に見える世界」つまり宇宙や周りの自然をどのように捉えるかという問題を「目には見えない概念」で記述したことである．実際,「2 階微分」あるいはそれを支える無限小・無限大の概念を惑星運動に見たり，雪や山並みを無限階層をもつフラクタル図形で見立てることは数学なくしてできることではない．

現在の不確実でなにがどこで起きても不思議でない不安定な世界が捉えにくくなっているのは，我々の生き方に制約を加える主体が太陽や月のような目に見えるものから見えにくいものに移行してきていることによる．地球温暖化，経済変動からリスクマネジメントまでその全体像や仕組みの解明はまだ道半ばであるが，いずれにも共通するのは関与する因子が膨大であり，単純な原因から結果という枠組みでは理解が難しくなっていることである．しかし一方でその変化は全くデタラメというわけではない．その正確な予測は困難であるが，ある誤差の範囲でマクロな傾向は把握できるようになってきた．もう少し身近な現象で，十分なデータや証拠が与えられたとして，我々は起こりうる状況を予測し，その対応策をとれるであろうか．JST が公開しているデータベース「失敗百選」（http://shippai.jst.go.jp/fkd/Search）にもあるように過去から現在に至るまで，我々は歴史から十分に学ばずに同じ過ちを繰り返している．非線形ダイナミクスを学ぶ者にとって，そのような誤った決断は予測しうるものであろうか？　またそのための大局的判断はどのような見方（これを世界観と言おう）から生まれるのであろうか？

1.1　イースター島・山火事

具体的な２つの話から始めよう．

イースター島は世界でも有数のヤシの木が豊富なところであった．ポリネシア人が移住し，カヌー作り，燃料，そして立像を立てたりすることにそれらを用いた．ヤシの木は同時に表層の土が流されないためにも重要なものであった．しかし彼らはそれらをどんどん切り倒し，ついにはヤシの木が絶滅するところまで切り倒してしまった．当然カヌーは作れないし，立像も立てることはできない．結局カニバリズムに陥り，９０％の住人が亡くなってしまった．

なぜこのような馬鹿げたことをしてしまうのかと訝しむであろうが，当時のイースター島での社会的，宗教的背景を我々が知らないこともあり，後世から見て同じ類の過ちを我々が犯していないと否定するのは難しい．しかし非線形ダイナミクスを多少でも知る人ならばこの現象は次の方程式が生み出す図１のような構造の必然の結果と考えるかもしれない [1].

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \Phi(x), \quad \Phi(x) = \frac{\beta x^2}{\alpha^2 + x^2} \tag{1}$$

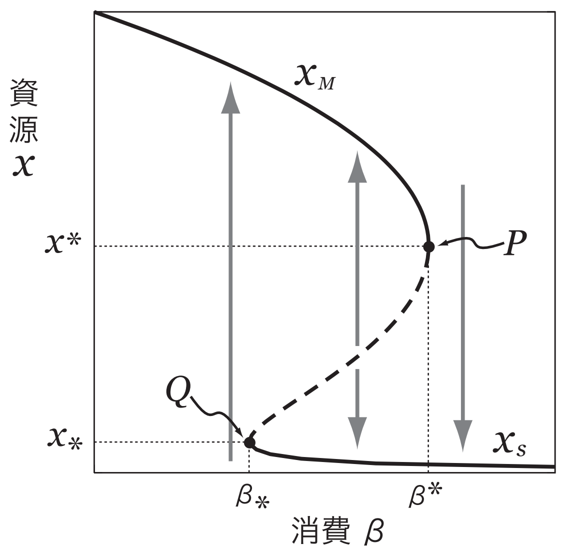

図１　資源 x-消費 β 空間での平衡点の構造：２つのサドル・ノード特異点とヒステリシス構造．P 点付近でいったん x_s に落ち込むと消費 β を減らしても，β_* より下がらないと x_M には戻れない．

方程式（１）は消費の効果を入れた資源（やしの木）x の時間変化を表す最も簡単な非線形方程式である．右辺第１項は，外的な影響を受けない時の，x の挙動を表し，第２項はそれを消費する効果である．β は消費の強さを表すパラメータである．β を固定する毎に，（１）の平衡点は図１のように変化する．逆 S 字型の曲線の上と下の実線部分は安定な平衡点 x_M と x_s，真ん中の点線部分は不安定な平衡点である．x_M は $P = (\beta^*, x^*)$ 点で，x_s は $Q = (\beta_*, x_*)$ 点で不安定解の枝につながる．β が小さいときには，x_M のみが安定な平衡点として存在するが，人口が増え，消費の程度が増す（β が大きくなる) と小さな x_s のみが安定に存在する．ここで注目すべきは次の３つである．

- 変化の時間スケール：消費の強さ β はゆっくり変化すると考えるのが自然である．従って資源 x の状態は β があたかも固定されたと考えた方程式（１）の安定解として実現される．ただし特別な β が２カ所ある．それは β_* と β^* であり，β がゆっくりとこれらの点から離れるとき，x は非常に速く，上から下，あるいはその逆に大きくジャンプする．このような特異点はサドル・ノード点とよばれる．”β はゆっくりと連続的に変化しているにも関わらず，x は急激にかつ大きくその値を変える”ところが重要である．つまり資源の総量の変化は人間の時間スケールに比べてゆっくりしているので，サドルノード点に近づきつつあっても感知されにくい．しかし一旦この点を越えるやいなや，一挙に崩壊に向かい，修復は難しい．日本庭園にある”鹿おどし”は，竹筒の状態を x，水の流入を β と考えれば，大きな音を出す秘密は上の時間スケールの違いにあると言える．
- 多重安定性（ここでは双安定性)・ヒステリシス：パラメータ β を固定しても２つ以上の安定状態があるとき系は多重安定性をもつという．このとき初期状態により最終状態が決まる．β が徐々に大きくなり β^* を越えると，系は x_s へ落ちる．このとき消費 β を小さくして，系を元に戻す努力をしても，β_* まで小さくしないと，元の x_M へは戻れない．これはヒステリシスとよばれる．系はある種の慣性をもっており，一旦悪くなると，元に戻すには何倍もの努力が必要となる．
- 不安定解（セパレータ）の重要性：どの程度の擾乱が加われば，x_M から x_s，あるいはその逆へ遷移できるかは，図１からわかるように，不安定解（点線部分）がその境目を作っている．言い換えれば系の運命はこの不安定解の族を把握していれば制御できると言える．その役割を強調して，それらをセパレータとよぶこともある．

もう一つはアメリカでの森林火災対策である．Montana や California などアメリカ西部の乾燥地域では頻繁に山火事が起きる．その鎮火のため年間１０００億円以上の消防費用と 4 万平方キロもの森林が消失している．少し前までは，山火事が起きるとすぐに消火

を試み，被害を最小限に留める努力がなされていた．しかし結果として逆に人間ではコントロールできない規模の広範囲な山火事が起こり，人家にも大きな被害が出た．試行錯誤の上，最終的にとられた対策はなにもしない，つまり”そのまま燃やしておくのがよい”という結論である．これは一見直観に反する．どのようにして住民を説得することができるのであろうか？そのためにまず燃えるために必要な燃料がどこから供給されるのか考えねばならない．それは樹木及び樹間にある枯木，下草である．落雷など自然に起きる小規模な山火事を常に消すことは，乾燥地域では燃料の蓄積を生み，結果として人間が制御できない大規模な山火事を引き起こす要因となる．ある単位領域で枯木や下草などの”燃料”に相当するものが存在する確率を p とすると，落雷のようにある確率で火種がまかれるとき，p と共に森林火災の規模も連続的に大きくなるように思われるが，実際はある p_c を超えると大規模火災が急激に増す．これは燃料の存在する範囲が p_c を超えると，一挙に大きなクラスターが形成されることによる．これは”パーコレーション”とよばれる．小さな山火事を放置せず，消すことは p を徐々に大きくしていくことに対応し，ある時点以降は「閾値」を超えて，いつ巨大森林火災が起きてもおかしくない状態になってしまう．小さな山火事は燃えるに任せておけば，燃料がないパッチ状の緩衝地帯が自然に形成され，それが山火事の伝搬をブロックしてくれるのである．

これら２つの例からわかるように，モデル作りのエッセンスは

$$\text{変化} = \text{入ってくるもの} \quad - \quad \text{出ていくもの}$$

であり，入ってくるものは資源（ヤシの木，燃料）であり，出て行くものは消費（人間，火災）と考えればよい．そして変化は漸進的にではなく，ある特異点（または相転移点）において破局的にそれまでとは異なる時間スケールで起こるのである．有名なタコマ橋の崩壊も風という外からのエネルギーの注入に対し，ある閾値を超えると橋が突然の大振幅のねじれ振動不安定性という形でエネルギーが放出された結果なのである．

1.2　予測は可能か？

「銃・病原菌・鉄」の著者である Jared Diamond [4] によれば，社会（我々）が重要な問題に対して，判断を誤り的確に対応できなかった場合，その原因は次の４つに分類できるという．

1. 問題を予測できなかった．
2. 問題が生じたことを感知できなかった．
3. 問題は感知したが，対応策をとらなかった．

4. 問題を感知し対応策もとったが，それが間違っていた．

前節に述べた2つの話はそれぞれ 1. と 4. に該当するであろう．非線形ダイナミクスを用いた上の2つの話の解釈は定性的で単純化しすぎていることは承知の上であるが，ここで強調したいのは，そのような「定性的モデルのダイナミクスから得られる大局的判断」の大切さである．これは縮約の思想として非線形科学では長い伝統がある [11]．日常的感覚からは非常識でも，破局的なことが起こりうることを認識することは重要である．

近年の計算機や統計科学の発達により，大量のデータの保持やその処理が相当高速に行えるようになった．それによりデータそのものの適切な加工により，ある種の相関あるいは因果律の傾向が顕わに見える場合がある．

上に述べた見方はそれと相補的なものであり，データ量の多寡によらないダイナミクスを駆動する構造を示唆してくれるものである．それは一見粗い定性的見方に思われるかもしれないが，全体を見たときに，その仕掛けを見抜く力を与えるものであり，判断する上での指針となるものである．その上で一旦，対象が決まれば，その現象に見合った定量的かつ精緻なモデルと理論解析を試みればよい．実際，森林火災においては地形，植生，天候等の詳細を考慮し，さらに火災現場のデータをフィードバックしつつより正確な伝搬予測を行うモデルが存在する（文献 [2]，[3]．参照）．

2　不安定性からの視点

これまでの例でサドル・ノード分岐点，多重安定性，閾値などという用語を用いてきた．実はここで見過ごしてはならないこととして不安定解の役割がある．例えば逆 S 字型の双安定の図1において，安定解がどの大きさの擾乱に耐えてそこに留まれるかを決めているのは，真ん中の不安定解 (点線部分) である．閾値というとき，越えねばならぬ峠を作っているのは，やはり不安定解である．神経細胞が興奮するため，あるいは化学反応が進むためには，すべてそのような峠を越えねばならない．つまり「変化するためにはいったん不安定にならねばならない」ということである．その意味で系のダイナミクスを制御している蔭の実体は「不安定解及びそれらの成すネットワーク」といってよい．この見方は多彩な出力を状況に応じて提示する系に対して非常に有効であるように思われる．実際私の研究対象である散逸系のパターンダイナミクスにおいてもそのような視点は極めて有効である [12]．さて四半世紀以上前に経済学者岩井克人氏は著作”Disequilibrium Dynamics（不均衡動学）”においてグローバル化した貨幣経済がもつ本質的不安定性を論じた．そこにおける概念は，非線形科学における「非平衡」の概念と共通するところ大である．様々

な制度，経済政策は結局のところ，その不安定さを暫定的にでも「擬似安定化」するために，外からとられる措置と考えられる．いずれにしろ，不安定性は捉えがたいもの，制御しにくいものと見なすのではなく，むしろそこから種々の可能性が生み出される源泉と考えるべきであろう．

さて話が経済まで及んだところで，より広く数学全体が他分野からどのように見られているか概観してみよう．

3 数学の有用性に関する合理的説明はない

Eugine P.Wigner[5] は 1959 年の R.Courant Lecture"The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences"において「数学の計り知れない有用性は想像だにできないくらいである．しかしそれに対する合理的説明はない」と述べ，例えば量子力学の複素ヒルベルト空間による解釈などを例に挙げながら数学と物理の予想もしない関係の発見と数学の有効性を述べた．今日に至るまでその関係は深まり，現代の幾何は弦理論，ミラー対称性，あるいは場の量子論なしには語れないであろう．一方物理学以外の分野では数学の有効性はどのように見られているかは，議論百出の状態である．分子生物学 [6] から経済学 [7] まで実に多彩な人たちにより議論されている．そこでは effectiveness のみならず ineffectiveness の立場からも検討されており，現状分析として傾聴すべき点も多い．しかし数学に対する期待感が薄らいでいるわけではない．一方，諸分野から数学へのフィードバックという逆向きの観点からは B.Sturmfels の"Can biology lead to new theorems?"[8] がその良い実例を与えているが，流れとして定着するにはまだ時間がかかるであろう．注意すべきは，しばしば数学は「概念とルールに基づく巧妙な操作の集まりにすぎない」と見られ，単なる「道具箱」であるという誤った見方がまだ根強く存在することである，これは当該の問題が既に数学的に定式化された中での範疇で議論が終始していることにその一因があると思われる．我々の周辺で起こる身近な現象にしろ，精密に制御された実験にしろ，そこに「数学概念」が観察されるわけではない．どのように数学の土俵に載せるのかというときに，数学は思いもかけぬ「関係付け」を提供してくれる可能性がある．既にそこで使われている数学とは全く異なるものである場合が多いであろう．結果として市川 [10] の言うような「整合的世界観」が独創性の原動力となり，INeffectiveness が effectiveness と変わる時期が，近い将来訪れることが期待される．

4　数学化する現代

イースター島の住人も我々も物理・化学法則のみに基づいて行動しているわけではなく，社会的存在でもある，道ばたに落ちている紙切れは普通は人間にとっても，犬にとっても単なるゴミであるが，そこに福沢諭吉の顔があれば，人間のみが驚きの表情と共にその行動が大きく変わる．これは先の岩井氏のあるコラムからの一節であるが，そのような人間の行動の織りなす社会集団ダイナミクスは，非線形科学の沃野である．多くのにわか株主がわずかな利ざやをかせぐために，株を毎日売買し，道路では車間距離をとらず，先を争って割り込むという行動パターンは，結果として市場の寡占化と道路の大渋滞を生み出し，社会全体としては大きなマイナスとなることは皮肉なことである．このような現象に対する説得力のある説明とそれに対する対策を明確に立てられるのは，非線形科学とそれを支える数学であろう．数学は何か特定の実体に依拠するわけではなく，それらの「関係性」のみを問題にするがゆえに，実体が何であるかとは無関係に同じ記号で表現できる．その意味で現代は急速に「数学化」しているといえる．個々は素子化し，均一化すると同時に，関係の変更や情報のやりとりはより大域的かつ迅速化している．Google に典型的に見られるように，関係性が重要で実体は問わないというネットワーク世界の構造とダイナミクスを速く見抜き，短期間の的確な予測を立てた者が勝者となるように見える．しかしそのような状況は，これまで見てきたように極めて脆弱な面，すなわち突然の崩壊にさらされる危険度も高い．いわば非線形科学でいうところの協力現象が起こりやすい状況に我々は生きているといえる．そうであるなら，我々に可能なことは，パラメータを特異点から一定の距離を保つような行動規範，倫理規範を作り実施することであろう．協力現象であるがゆえに，個々の小さな貢献はマクロな効果として見えるというのが非線形科学の教えることである．

参考文献

[1] R. M. May, Thresholds and breakpoints in ecosystems with a multiplicity of stable states., Nature 471-477 (1977).

[2] A.L. Sullivan, A review of wildland fire spread modelling, 1990-present 1: Physical and quasi-physical models February 1, 2008 (http://arxiv.org/abs/0706.3074v1)

[3] R. アンドリューズ, M. フィニー, M. フィシェッティ，森林火災を予測する， 日経サ

イエンス 11 月号 (2007)

[4] Jared Diamond: インタビュー記事:http://www.edge.org/3$rd_culture$/diamond03/$diamond_index$

[5] Eugine P.Wigner,The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Richard Courant Lecture in Mathematical Sciences delivered at New York University, May 11, 1959, CPPM, vol.13, 001-14 (1960)

[6] A. Lesk, The unreasonable effectiveness of mathematics in molecular biology, The Mathematical Intelligencer, 22(2), 2000

[7] K. Vela Velupillai,The unreasonable ineffectiveness of mathematics in economics Cambridge Journal of Economics 2005 29(6):849-872; doi:10.1093/cje/bei084

[8] B.Sturmfels, Can biology lead to new theorems?, Annual Report 2005 of the Clay Mathematics Institute

[9] 岩井克人, 不均衡動学とは,「ヴェニスの商人の資本論」所収, ちくま学芸文庫 (1992)

[10] 市川惇信:「科学が進化する５つの条件」　岩波科学ライブラリー 146(2008)

[11] 蔵本由紀　「非線形科学」　集英社新書 (2007)

[12] Y. Nishiura, T. Teramoto and K. Ueda, *Dynamic transitions through scattors in dissipative systems*, Chaos **13**(3) 962-972 (2003)