現象数理学：冬の学校

「パターンダイナミクス 1–2–3」

報　告　集

はじめに

「現象数理学：冬の学校」は、科学研究費補助金基盤研究（Ｓ）「非線形非平衡反応拡散系理論の確立」（代表者：三村昌泰）の教育研究活動の一環として、これから現象数理学の研究を始めようとする学生の方々に向けた、入門的内容を主として、2009 年 12 月 9 日―11 日の 3 日間、明治大学紫紺館において開催されました。本報告集は、当日の講義集をもとに、受講された学生の方々の今後の研究・学習などへの便宜をはかる事を目的として作成されたものです。

本報告集作成のために、ご協力いただいた各講師の方々、ならびに関係者の方々にここに厚くお礼申しあげます。

2009 年 12 月
組織委員： 三村 昌泰（明治大学）
西浦 廉政（北海道大学）
小川 知之（大阪大学）
上山 大信（明治大学）
若狭　 徹（早稲田大学）

目　次

北海道大学 電子科学研究所

西浦　廉政

高校生までは文系か理系か迷っていました。なぜこんな仕分けがあるのだろうかと疑問でしたが、大学へはとにかく入ってしまえということで、何をやるべきかははっきりしていませんでした。

当時は教養の２年間はほとんど講義がなく、勉強はしなかったのですがお陰で考える暇は与えてもらいました。川田順造の本などを読んでそのような方面にまた転向しようかとも思いましたが、結局理学部へ転学部して、数学をやることになりました。いろんな先生や友人、先輩に出会えたことは幸いでしたが、今でいうところのロールモデル的な人には大学関係者では出会えなかったように思います。

理系関係の書物では中高から読んでいた寺田寅彦、また雑誌「自然」（だいぶ昔に廃刊となりました）などは好きで、こういうのが面白いなあと漠然と思っていました。その意味では本からの影響は大きかったように思います。

組織的に一貫して勉強した記憶がなく、すべてが泥縄勉強だったようにも思いますが、非線形科学は述語的学問とするならば、そのようなやり方でも理解できた面があるのでしょう。植草甚一ではありませんが、雑学で科学するというのも悪くないのかもしれません。でも雑学は決して雑駁な学問というわけではありません。バラバラなようでいて、人間というのは何か共通するというか共感するものを発見してしまうようです。

そういうちょっと抽象的なレベルと具体的なものの間を往復するというのが、応用数学では大事なことではないかと思っています。

Turing から Ertl まで
−パターンダイナミクスの半世紀−

北海道大学電子科学研究所
西浦廉政

1 実験と理論の螺旋階段

散逸系のパターンダイナミクスは様々な不安定性の発見とその理解の歴史と言っても過言ではない．その多くは身近なものに由来するにも拘わらず，その中から多くの普遍的概念や方法論が抽出されてきた．それらが大袈裟に言えば，２１世紀の中庸に向けて新たな自然観を生み出すのではないかと期待されている．それらを牽引したのはいくつかのマクロスケールの実験であった．とりわけ時間的リズムやラセン波を生み出す Belouzov-Zhabotinsky 化学反応，Rayleigh-Benard 対流現象, 神経伝播の Hodgkin-Huxley, そして空間周期構造を生み出す Turing パターンなどがその代表である．他の例にもれず，これらの実験とその解釈をめぐる理論発展は双方向的であった．例えば，最後の Turing パターンは Alan Turing により 1952 年に予想されていたが [1], それを真に実現する反応系は，高分子ゲルの採用を始め，様々な工夫を要し，1990 年まで待たねばならなかった [2]．しかし一旦，それが実現すると Turing が予想だにしなかった自己複製パターンを始め，実に多様なダイナミクスが発見されそれが新たな理論発展の契機となった．BZ 反応系においても，様々な実験手法の採用により，ナノスケールのパターン形成も制御できるようになり，さらに情報コーディングの可能性まで示唆されている（例えば [3] 参照)．この相互螺旋的関係は今後も継続して行くであろう．2007 年度のノーベル化学賞は表面化学反応への大きな功績によりドイツのマックス・プランク研究協会フリッツ・ハーバー研究所の Gerhard Ertl 博士に贈られた．受賞講演の題目は"Reactions at solid surfaces: From atoms to complexity"（講義録:$http://nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/2007/ertl-lecture.html$) というもので，表面化学反応のミクロレベルからマクロレベルの階層的理解と共に，アンモニア

合成や車の排気ガス処理という工業的に重要な課題の遂行に多くの非線形科学に関わる研究者が貢献していることが窺い知れ興味深い．例えば有害な一酸化炭素を二酸化炭素に変換する過程は触媒のプラチナ表面上で飛躍的に進行するが，そのダイナミクスの機構解明は実験ーモデルー理論の３者の有機的連携により遂行されている．図１は Ertl 博士の考案による PEEM 法により，プラチナ表面上で生じる化学反応パターンの写真である．ラセン波，同心円波，定在波，時空カオスが明瞭に観察されている．

このように実験系でも理論モデルにおいても，多彩かつ複雑なパターンダイナミクスが発見されているが，それらを統一的に見る視点は何であろうか？　答えはむろん一つではないと思われるが，本講演では「不安定秩序解及びそれらのつながり具合」という観点からこれまであまり手のついていなかった，粒子解の衝突や不均一場でのダイナミクスなど，いくつかの諸問題に光を当て，新たな視点を提示したいと思う．同時に形の多様性を識別する数学的測定法として，計算ホモロジーの有用性についても触れたいと思う．

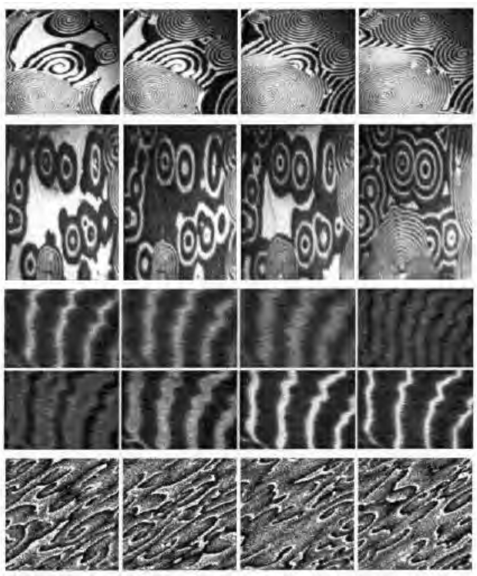


図１　PEEM(photoemission electron microscopy) 法によるプラチナ表面上での CO の酸化反応．黒い（白い）ところは $CO(O^2)$-rich な領域を示す．上からラセン波，同心円，定在波，時空カオスの４種類のパターン．時間進行は左から右へ進み (約 $10s$), 長さは約 $0.1mm$ である [4]. (The Surface Imaging Group, Dept. of Physical Chemistry, Fritz-Haber-Institute of the Max- Planck-Society, www.fhi-berlin.mpg.de/surfimag)

1.1 Turing 不安定性ー内在する不安定性の顕現ー

「拡散誘導不安定性」あるいは「Turing 不安定性」とよばれるものは，何であったかを，やや通常とは異なる観点から復習しよう．活性化因子，抑制因子という２因子力学系が安定な平衡状態をもつとする．今それらが拡散により空間的にも広がることができるとする．Turing 不安定性とはある条件のもとで，その安定均一平衡状態は不安定化し，空間周期構造がそれにとって代わるというものである．拡散という, より安定化をもたらすと思われる効果が逆に不安定化をもたらすという事実に着目したのは Turing の天才的なところである．ここで「ある条件」というのは，「抑制因子は活性化因子より速く拡散する」という要請である（詳しくは例えば [5] 参照）．これを具体例で見よう．

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = & D_u \Delta u + u(1-u)(1+u) - v \\
\\
\dfrac{\partial v}{\partial t} = & D_v \Delta v + k(u - \gamma v),
\end{cases}
\tag{1}
$$

ここで Δ は N-次元ラプラシアン、D_u, D_v は拡散係数であり、境界条件は周期条件を採用する。非線形性は FitzHugh-Nagumo 型とよばれる３次と１次の特別な場合を採用する ($k = 3.0$, $\gamma = 2/3$)．拡散がないとき, 平衡点 $U^* = (0,0)$ は２次元常微分方程式の安定結節点である．なぜ拡散により一様状態 $(0,0)$ が不安定化し，空間周期構造が新たに出現するのかを (u,v) 平面での曲線の動きで説明しよう．

空間変数 x を媒介変数とみて、(u,v)-空間で (1) の解をプロットすると、周期境界条件なので，ある閉曲線が得られる．拡散は２階微分ゆえ、粗っぽくいえば曲率に比例した収縮力となる．さらに拡散係数の違いは縮み方の 異方性をもたらす．$U^* = (0,0)$ の近くに図２のような円周状の初期値をとろう．ここで拡散係数は $D_u = 0.4, D_v = 250$ と抑制因子の拡散が十分大きい．このためまず v-方向の縮みが急速に進み、閉曲線は横長の扁平な楕円に変形する．仮定より $(0,0)$ は安定結節点ではあるが，その線形化行列の符号から円上の第 2(4) 象限から出発した軌道は一旦左下（右上）に行ってから原点に収束する．つまり u-方向に射影した成分で見れば，平衡点から離れる方向になっている．従ってこの扁平楕円は横にさらに引き伸ばされ，あるところで拡散の曲率による縮みと反応項のベクトル場がバランスするところで止まる．言い換えれば「Turing 不安定化」とは拡散係数の違いが (u,v) 平面での異方的縮みをもたらすことにより活性ー抑制系に内在していた不安定化を引き出した結果であると言える．言い換えれば，拡散という空間方向の動きの自由度を獲得した結果，隠れていた不安定能力が顕在化したのである．従って当然ではあ

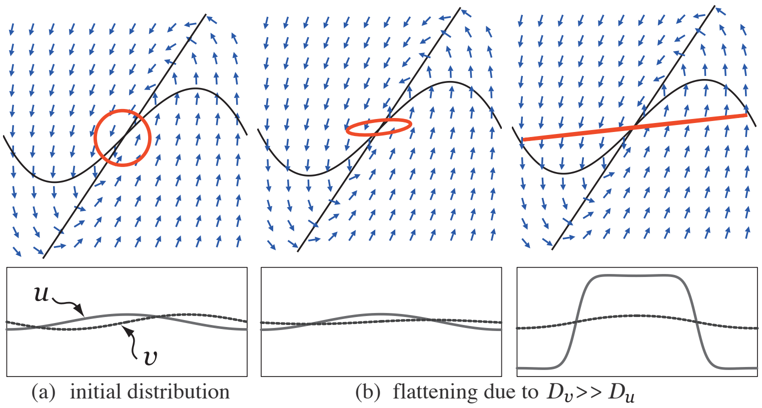


図 2　Turing 不安定性：(a) 安定平衡点周りでの初期摂動は丸い円である．(b) 抑制因子の拡散が速いため，すぐに扁平楕円に変形する．そこでのベクトル場は平衡点から遠ざかる方向であり，楕円は横に伸ばされ，最後は非線形性により，3 次関数の左右の枝付近に落ち着く．

るが，そのような不安定方向をもたない安定平衡点では拡散係数をいくら調整しても不安定化は起きない．

Turing 不安定性により空間周期構造が形成されるが，空間 2 次元以上ではどのような周期構造があるのか，またどれが実現されるのかについての理論的考察が進んだのは最近のことである．3 次元ではようやく注意深い数値計算により，その端緒が開かれたばかりである．1.2 節では変分問題として定式化されるクラスについて簡単に述べ，1.3 節では 3 次元のブロック・コポリマーの形態問題に対して，計算 Homology の手法が有効であることを述べよう．

1.2　変分構造

Turing 不安定性は空間周期構造を生み出すが，空間が 2 次元以上の場合，具体的にどのような周期構造が実現されるのであろうか．むろん非線形・非平衡系の特徴として，同じ設定であっても，最終状態は初期値に強く依存する．しかし定常問題に限定するならば，ある状況下ではそれを非局所項をもつ変分問題に帰着され，エネルギー的な議論が可能となる．

反応拡散系 (1) の領域 Ω 上での定常問題を考えると，第 2 式は u,v について線形であり，境界条件 (例えば Neumann 条件) に応じた Green 作用素 K を用いて v について解くことができる．第 1 式に代入すると，定常問題は次の Euler-Lagrange 方程式であることが

わかる．

$$E(u,\epsilon) := \int_\Omega \left(\frac{\epsilon^2}{2}|\nabla u|^2 + F(u) + \frac{1}{2}K(u)u \right) dx \tag{2}$$

ここで $D_u = \epsilon^2$, $F(u)$ は４次の２重井戸ポテンシャルである．このエネルギー汎関数の $H^1(\Omega)$ における最小値を達成する解の性質を調べることになる．とくに ϵ が小さい時が数学的にも興味深い特異極限問題となる．積分値を減らすには，右辺第１項は界面を減らそうとし，第２項は２重井戸ポテンシャルの底の値 $1. -1$ のいずれかをとるのが望ましいが，第３項は非局所項（完全連続）であるので，むしろ激しく振動する（0 への弱収束列）方が値を小さくできる．従って最小解はこれらをバランスする形で決定され，それが特徴的長さを生み出すこととなる．実際，その界面の面積は $\epsilon \to 0$ の時，$\epsilon^{-1/3}$ のオーダーをもつことが示せる．この極限解を特徴付けるには Young 測度を用いるのが自然となるが，ここでは割愛する ([7] 参照)．

既に気付かれた読者も多いと思われるが，このような局所項と非局所項を同時に有する汎関数の最小値問題は材料科学においてしばしば現れる．実際，太田ー川崎，Bahiana-大野らによるブロック共重合体系の問題はその範疇に属する．数学的な再定式化とその特異極限問題は [6] で議論された．既に空間２次元においては，ヘキサゴナル構造がエネルギー最小値を達成することが厳密に証明されている（[8]) が，３次元においては，ラメラ相やヘキサゴナル相以外にも多様な周期構造が存在し，はるかに豊富な形態が存在する [9],[10]．３次元空間における形態同定問題は周期的という条件をつけても容易な問題ではない．より複雑な形状が遷移的に出現する場合はなおさらである．視覚に頼らない信頼できる形態判別法はあるだろうか．次節においては，ベッチ数を用いる新たな数学的判定法を述べよう．

1.3 計算ホモロジーによる空間 3 次元ネットワーク構造

Turing パターンとミクロな機構は全く異なるが，３次元周期構造を成すものは自然界に遍在する．例えば水中の脂質や界面活性剤などの両親媒性分子は, 疎水基と水分子が接触を避けるようにミクロ相分離界面を自発的に形成し, 空間を 2 つの無限に連結した共連続な部分空間 ($X^\pm$) に分割する．この界面構造は数学的によく知られた空間 3 次元周期極小界面を自発的に形成し, ジャイロイド (Gyroid), ダイヤモンド (Diamond), プリミティブ (Primitive) の 構造は共連続立方相とよばれる.*1 これら非相溶性により生じる 3 次元相分離構造のなかで, 2 本のジャイロイドネットワークがお互いの懐をかいくぐるよ

*1 以下, G, D, P と略記する．

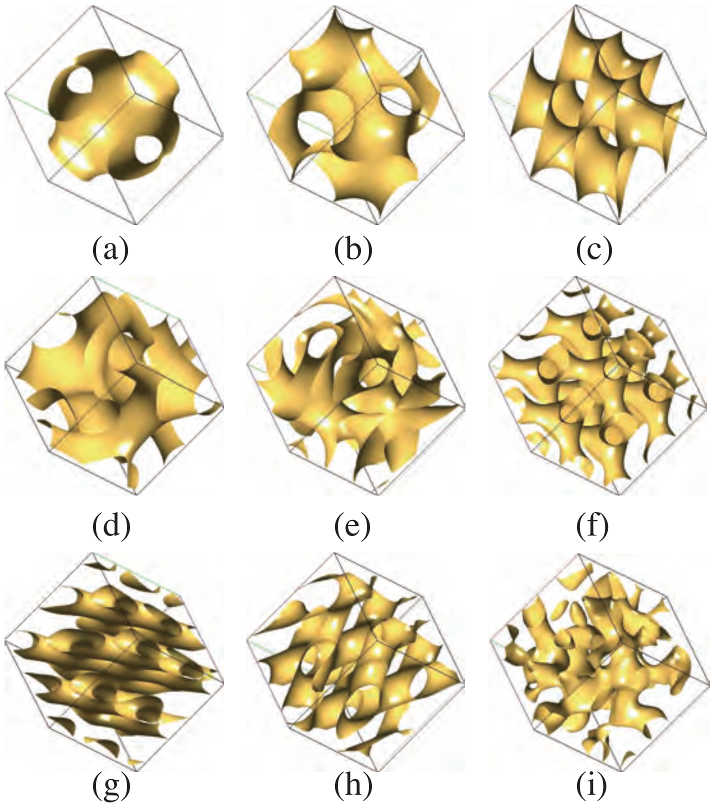


図 3　ソフトマターにおける共連続界面構造 (上段) シングルネットワーク構造, (a) プリミティブ, SP (b) ジャイロイド, SG (c) ダイヤモンド, SD. (中段) ダブルネットワーク構造, (d) ダブルプリミティブ, DP (e) ダブルジャイロイド, DG (f) ダブルダイヤモンド, DD. (下段) (g) 穴あきレイヤー構造. (h) 空間群 Fddd のメッシュネットワーク構造. Betti 数は $\beta_i(X^{\pm}) = (1, 13, 0, 0)$ である. (i) ダブルダイヤモンドと同じ Betti 数を示すランダムドメイン構造.

うに編み上げたダブルジャイロイド構造をとるときに, 界面形成によるエネルギーの損失分を, 周期的極小曲面のなかで最小にできることが理論的にわかってきた (例えば [9]). 実験的にも, 医療で用いられる CT (computerized tomography) スキャンの技術を応用した 3 次元電子顕微鏡法によって, ナノメートル (nm) オーダーの構造を 3 次元的に高分解能で観察することができるようになり, ブロック共重合体系の共連続相はダブルジャイロイドであることが決定的となった. 従来の透過型電子顕微鏡では, 試料を透過した電子の強弱から得られる画像は深さ方向の情報を失った 2 次元的なもので, ダブルジャイロイドのような複雑な構造の解明には不向きであった. 陣内教授らが開発した 3 次元電子顕微鏡法では, 試料を ±60 ° 程度の範囲の様々な方向から撮影し, 得られた平面透過画像を積み重ねて 3 次元画像を構成できるようになった. このように, 実験技術の進歩によって得ら

表 1　ソフトマターにおける共連続構造の Betti 数と空間群. シングルネットワーク構造ではドメイン X^+ とマトリックス X^- について対称だが, ダブルネットワーク構造にはあてはまらないことに注意せよ. 空間群の記号 I, P, F はそれぞれ体心, 単純, 面心の立方晶系のブラベー格子であることを示す.

	シングルネットワーク			ダブルネットワーク		
	$\beta_i(X^+)$	$\beta_i(X^-)$	空間群	$\beta_i(X^+)$	$\beta_i(X^-)$	空間群
P	(1, 3, 0, 0)	(1, 3, 0, 0)	Pm3m	(2, 6, 0, 0)	(1, 6, 1, 0)	Im3m
G	(1, 5, 0, 0)	(1, 5, 0, 0)	$\mathrm{I4_132}$	(2, 10, 0, 0)	(1, 10, 1, 0)	$\mathrm{Ia\bar{3}d}$
D	(1, 9, 0, 0)	(1, 9, 0, 0)	Fd3m	(2, 18, 0, 0)	(1, 18, 1, 0)	Pn3m

れてきたナノメートルレベルでの立体構造データを, どのように表示し, 解析するのかが問題となっている. 複雑な構造の「つながり」を解析するための視覚に頼らない方法が必要で最も古典的なものは典型的な代数的位相不変量でもある オイラー数 χ であろう. オイラー数は複雑なデータに対する単純だが有用な測定量であり, 位相空間 X の構造を連続変形しても変わらない. その変化は系のトポロジーが根本的に変わることを意味する. オイラー-ポアンカレの定理より, オイラー数は Betti 数の交代和

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \beta_i(X),$$

であることから, ホモロジーへの導入である Betti 数の方が, より情報量の多い位相不変量であることを示している. 計算ホモロジープロジェクト (CHomP) を展開する Mischaikow らのグループ [11] は物質科学から生命科学までの応用を視野において, 新たな非侵襲的トポロジー測定法の有用性を提案している (日本語の [12] も参照). 実際, Betti 数を用いれば, 図 3 にあげるような様々の共連続界面構造について, 表 1 のように区別して表すことができる. ただし, 基本格子構造について Betti 数を計算した. ドメインや穴の数に対応する Betti 数は, 考慮する周期の数によって変化することに注意しよう. 閉曲面の三角形分割についてのガウス-ボンネの定理より, オイラー数は考慮する領域の大きさに依存するので, 上述のオイラー-ポアンカレの公式より任意の周期数についての Betti 数を得ることは可能である. また Betti 数によって, すべての空間 3 次元構造を分類して表すことはできないことにも注意しよう. 例えば, 図 3(i) のように, ダブルダイヤモンドと同じ $\beta_i(X^+) = (2, 18, 0, 0), \beta_i(X^-) = (1, 18, 1, 0)$ を示す規則性のないランダムドメイン構造も無数に存在する.

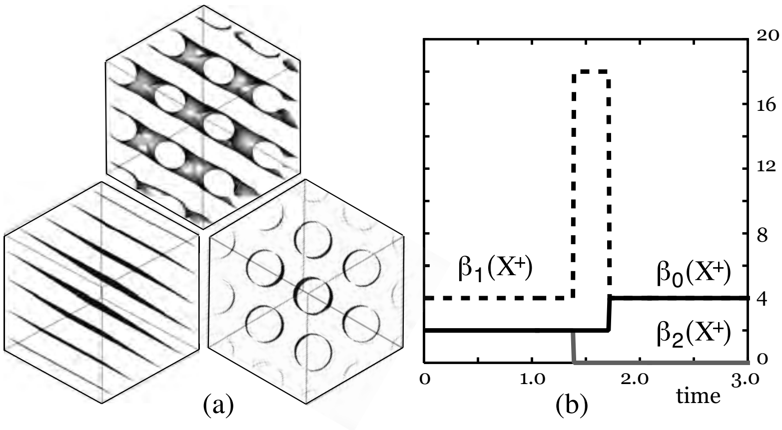


図 4　ミクロ相分離モデルの数値シミュレーションによるモルフォロジー間転移での Betti 数の変化．レイヤー → ヘキサゴン転移．層状ドメインに穴が等間隔にあいた穴あきレイヤー構造を経て, ヘキサゴン構造にいたる．穴あきレイヤー構造の Betti 数は $\beta_i(X^+) = (2, 18, 0, 0)$ と $\beta_i(X^-) = (1, 19, 2, 0)$ であるので, 層状ドメイン 1 枚あたりに 8 個の穴があいている．

以上の点に注意を払えば, Betti 数による空間 3 次元構造の分類は非常に有効ば手段になる．それは単に最終形態の判定だけではなく，遷移的に現れる形状についても有益な情報を与えてくれる．例として, 次のミクロ相分離モデルの Cahn-Hilliard 方程式の数値シミュレーションで再現したモルフォロジー転移におけるトポロジー変化をあげておく [13].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\{-\epsilon^2 \Delta u - u + u^3\} - \sigma(u - \overline{u}),$$

図 4 は, 層状ドメインが 2 枚並んだレイヤー構造を初期条件として, 系のパラメータを変化させたときに得られる構造相転移について, その Betti 数の変化を示したものである．レイヤー → ヘキサゴン転移において，遷移的ではあるが，明確にある形状に鞍点として留まることが (b) の時系列データよりわかる．それが穴あきレイヤー構造であることは, その Betti 数による評価ではっきりする．

2　有限と無限のはざま

観察する対象に比べてシステムサイズが十分大きければ，それは無限系で記述することができる．この命題は正しいであろうか？　境界条件などの外因的な効果ではなく，その系固有のダイナミクスにより引き起こされるものを解析したいとき，空間全体が自然な定

義領域であり，実際その方が取り扱い易いであろう．しかし実際の現象あるいは実験は常に有限システムサイズで行われるので，非常に大きいが有限領域での現象が無限領域でのそれと対応しているかどうかは考察に値する重要な問題である．このような問題は既に複素 Ginzburg-Landau 方程式などに対しても考察されているが，ここではパターン形成問題，とりわけラセン波とパルス波に関わるものを取り上げよう．以下で重要となる次の 2 つの不安定性の違いを注意しておこう．

絶対不安定性 (absolute instability) は局在化した摂動を与えたときに，それがいたるところで増大するものをいう．一方，伝播不安定性 (convective instability) は摂動は増大するが，それらは伝播し，その最大点は無限遠に流されていく．従って各点的には安定となる．むろんこの違いはどのような座標系で記述するかに依存する．1 次元の場合，方向も含めてそのような伝播不安定性を特徴付けるには指数重み付き空間で考えると便利である．例えば右方向に伝播しながら指数的に増大する摂動は，それより速く増大する指数重みの空間で考えることで安定化できる．詳しい設定等については [14] を参照されたい．

2.1 Spiral breakup

BZ 反応系などの散逸系における典型的パターンとして回転ラセン波 (spiral wave) があるが，パラメータを変化させるとメアンダリングを始めとする様々な不安定化とその結果生じる複雑なパターンが知られている．それらは離散固有値による Hopf 不安定性に起因している．領域が有限か無限であるかに深く関わる不安定性は，図 5 に示したような core-breakup と far-field-breakup というラセン波の崩壊である．この数値実験は第 1 節で述べたプラチナ表面上での CO の酸化過程を記述する次のモデル方程式を解いて得られたものである．

$$\begin{cases} u_t = & D_u \Delta u - \frac{1}{\epsilon} u(u-1)(u - \frac{b+v}{a}) \\ v_t = & f(u) - v, \end{cases} \tag{3}$$

$$f(u) = \begin{cases} 0, & 0 \le u < 1/3 \\ 1 - 6.75u(u-1)^2, & 1/3 \le u \le 1 \\ 1, & 1 < u \end{cases} \tag{4}$$

これらは共に最終的に時空カオスに至るが，崩壊のきっかけがラセン波の中心部で起きるか，境界周辺部で起きるかの違いがある．この崩壊がいつ起きるかの判定法を理論的に考えるためにはラセン波の安定性解析が不可欠となる．問題は全領域での安定性解析がどこまで有効であるか，もし有効でないなら領域が大きくなるときのラセン波のスペクトル

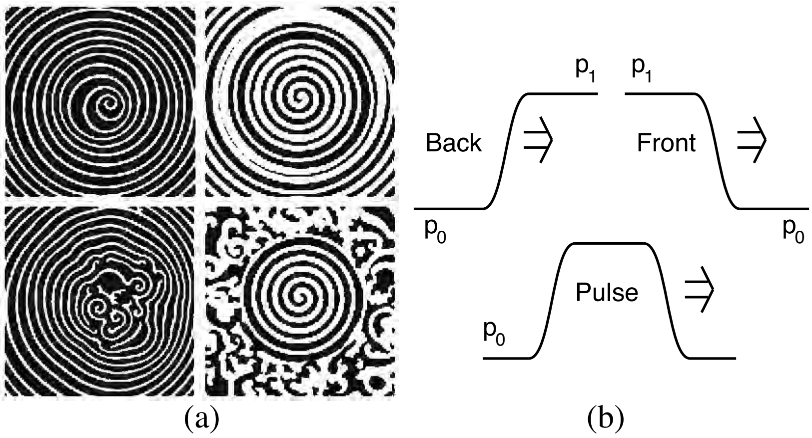


図 5　(a) ラセン波の崩壊:左は中心のコア付近から不安定が始まり，下のようにちぎれた端から新たなラセン波が生じ乱流状態となる．右はコアから離れた境界付近から Eckhaus 型不安定が生じ，周りから乱れていく．　(b) ２つの不安定解を組み合わせて安定パルスを作る．Double heteroclinic loop pulse の生成．Björn Sandstede http://personal.maths.surrey.ac.uk/st/B.Sandstede/index.php

の漸近挙動と breakup はどのように関連するのかについて調べる必要が出てくる．Arnd Sheel と Bjorn Sandstede[14] らによる結論は全領域でのスペクトル解析では不十分であり，次節に述べる Absolute spectrum（絶対スペクトル）が breakup の出現判定の鍵となるというものである．しかしながら core と far-field の２つの不安定性の違いは区別は完全には解明されていない..

2.2 Absolute spectrum

平面全領域でのラセン波の安定性は線形解析のレベルでは，ラセン波の半径無限大における平面ラセン波のスペクトルのそれで決定され，さらにその実部の最大値は，１次元波列のスペクトルのそれと一致する．つまり２次元ラセン波の安定性は無限遠方での１次元波列の連続スペクトルで決まる．それでは大きいが有限な領域（例えば大きな半径 R の円盤領域）でのラセン波の安定性は上の連続スペクトルでよく近似されると考えてよいであろうか？　答えは NO である．有限領域において反応拡散方程式系のスペクトルはすべて離散的となる．従って，半径 R が無限大となるときの，それら離散スペクトルの漸近挙動がわかれば判定可能となる．もし漸近的に連続スペクトルにすべて集積して行くならば，無限系は良い近似を与えていることになるが，実はそうは一般的にはならない．絶対スペクトラムは粗く言えば，そのような離散スペクトルの $R \to +\infty$ での集積点集合で

あり，それらは連続スペクトルとは一致しない．絶対スペクトルそのものはスペクトルではないことに注意しよう．領域が十分大きい時，その近くに対応する離散スペクトルの存在を示唆するものである．
絶対スペクトルの厳密な特徴付けについては多少の準備が必要なので，ここでは述べないが，それを用いると次が得られる．

命題 (絶対スペクトルによる判定法)
大きいが有限の領域では，絶対スペクトルの実部の最大値がラセン波の崩壊の始まりを特徴付ける．

2.3　不安定フロント＋不安定バック＝安定パルス？

有限と無限のはざまを示す興味深い例として，不安定な２つの波を組み合わせると実は安定な波を構成できることを示そう．図 5(b) は２つの定数状態 p_0, p_1 をつなぐ速度が同じフロント解とバック解を表している．ここで p_0 は漸近安定な定数解であり，p_1 は不安定な定数解である．そのような解は，例えばモデル系 3 において実現可能である．これら２つの解は不安定な定数領域をもつために共に不安定な解となる．実際，不安定定数領域に加えた局在摂動は時間と共に増大し，その最大値は発散する．しかしこれら２つの波を合体させて作った図 5(b) 下のようなパルス波は安定にすることが可能である．実際，領域 p_1 での不安定性が伝播不安定性であるならば，パルス波になった瞬間に，その定数領域は非常に長いが有限となる．従って摂動が指数的に増大するとしても，初期摂動のクラスを定数領域の長さと増大度に応じて，小さく取れば，その摂動は十分に成長してパルス波を破壊する前に，安定定数領域 p_0 に押し流されて，パルスは元の形を取り戻すことができる．講演では Sandstede-Scheel によるものとは異なる，わかりやすい例で解説したい．

3　不安定秩序解が駆動する遷移ダイナミクス

3.1　外界との相互作用で顕在化する内部不安定性

これまでは一つのパターンに着目してきたが，次にまわりとの相互作用により隠れていた不安定性が外在化する場合を考えよう．とくに空間的に局在化したパルスやスポットなどの自己駆動するパターン（以下これを粒子解とよぶ）について議論する．前節までの空間方向に何らかの周期性を持ったパターンと一見異なるが，その周期が長くなり，同時に１ユニットの波同士が斥力的に相互作用する場合には，それらは周期無限大の極限では粒

子解と自然につながってくる．一定速度で進行する安定な粒子解が外界と相互作用する典型的な場合は次の２つである．

1. 衝突
2. 場の不均一性

最初のものは，媒質は一様であるが，他の粒子解と衝突する場合であり，後者は波が伝播する場の不均一性から来る障壁との衝突である．ここで考える衝突は粒子解のテール部分のみで相互作用する弱いものではなく，消滅したり，合体することも許す強い相互作用を考える．保存量や順序保存則がない系において，これらの強い相互作用を統一的に見る視点は何であろうか？　本講演で提示したいのは，

相互作用により顕在化した不安定秩序解達の成すネットワーク構造

からの見方である．相互作用の場をブラックボックスとして，衝突過程をその前後の２つの安定状態の遷移と考えれば，不安定状態（サドル）を経由しなければならないというのは自明に思われるが，ここでの立場は衝突の結果としてサドル状態を通らねばならないというのではなく，むしろ「不安定状態」を中心に据えて，全ダイナミクスを眺めようというものである．パターンの大変形を逐一追うことは極めて難しいが，不安定解のリスト作りや不安定次元は計算可能となり，それらを骨格としてダイナミクス全体の理解が可能となる．むろん反応拡散系のような無限次元系において，空間２あるいは３次元において不安定解を捉えることは数値的にも容易なことではない．興味深いのは，これらは真の非平衡状態，言い換えれば分岐点から遠く，自発的な対称性の破れを何回も起こした後の系であるが，対称性の高い（しかし不安定度も大きい）秩序解がそこでの複雑（に見える）ダイナミクスの理解の鍵となる点である．

２次元以上の高次元空間での自己駆動する粒子解が複数共存するためには（衝突させるには２個以上必要である），これまでに扱った２種反応拡散系では不十分で，次のような３種系で考えることになる．空間自由度が増えることにより，パターンの広がりや縮みを制御する３種目が必要となるというのが直感的説明であるが，２種系での非存在はまだ証明されたわけではない．

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t = & D_u\Delta u - \frac{uv^2}{1+f_2w} + f_0(1-u) \\ v_t = & D_v\Delta v + \frac{uv^2}{1+f_2w} - (f_0+f_1)v \\ \tau w_t = & D_w\Delta w + f_3(v-w), \end{array}\right. \tag{5}$$

この３種系は $w \equiv 0$ とするとよく知られた２種 Gray-Scott モデルに帰着する [15]．このモデル方程式は第１節で述べた Turing パターンが発見された後，実験においても確認された自己複製パターン，線状に広がるスネークパターンなど，非常に多彩な動的パターンを生み出す一つの雛形方程式となった [16]

3.2　衝突・不均一性による不安定性の顕現

方程式系 (5) において一定波形，一定速度で進む２次元粒子解を考える．パラメータ (τ, f_1) に応じて衝突過程は多様に変化する．典型的には反射・合体・消滅の３つが起こり，図６においては f_1 を少し変化させることにより，消滅 (a) から合体 (b) への変化が生じることを示している (合体後の Large Disk 解は drift 不安定性をもつので，一定の時間後には進行粒子解となる)．これらの遷移の詳細は複雑で逐一の変形をすべて記述することは容易ではない．しかしこの変形の鍵を握っているのは，いくつかの不安定定常解とその間のヘテロクリニック結合であることが解明されてきた [21], [20], [19]．粒子解が媒質の不均一性，例えば jump あるいは bump 型の障壁に当たるときも通過，反射，分裂，ピン止めなど多彩なダイナミクスが障壁の高さや勾配に応じて起きることが知られている．この場合も粒子解が持っていた隠れた不安定性が障壁に当たることで，新たな不安定解が顕在化し，それらの集合と相互関係を考慮すると統一的な理解が可能となる [18].

3.3　不安定秩序解の大域分岐構造とネットワーク構造

反射するのか，合体して１つのスポットとなるのか，あるいは対消滅するのかを仕分けているのは，３つの分水嶺解 (scattor) とよばれる不安定解とそのヘテロクリニック結合である．そのつながり具合を示したのが図 6(c) である．Peanut, Large Disk, Small Disk という３つの不安定解が存在し，不安定次元はそれぞれ $5, 2, 1$ である．例えば Large Disk の２は drift 不安定性を意味する．反射するか，合体するかは Peanut 分水嶺が仕分け，パラメータによって，合体後は Large Disk，または Small Disk となる．Large Disk に近づけば，drift 不安定性により，一定時間後にある方向に進行し始める．一方 Small Disk に近づけば，再びパラメータの値に依存して Small Disk の安定多様体のどちらの側に来るかにより，中央部分が成長するか減衰するかが決まり，それに応じて Large Disk に進むか，または自明な定数解に近づく（対消滅）．このような見方は，２相対流系における空間局在した対流セルの衝突においても有効であることが知られている [17]．紙面の都合で，ここでは割愛するが，衝突や不均一場でのダイナミクスの多くは，縮約により有

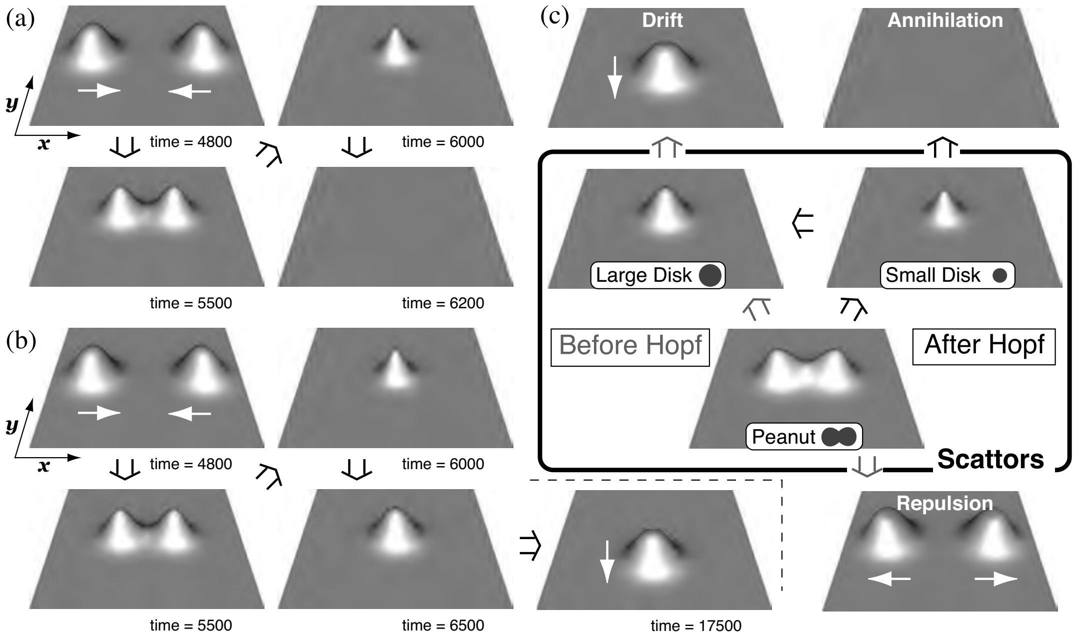


図 6　粒子解の衝突の遷移と分水嶺解から成るネットワーク構造．(a) 対消滅: Peanut → Small Disk → 一様状態，というヘテロクリニック経路が駆動． (b) 合体-ドリフト: Peanut → Small Disk → Large Disk → 進行 spot，という経路が駆動．この (a)-(b) 間の遷移は $(f_1, \tau) \approx (0.0640, 76.667)$ 付近で起きる． (c) 3つの分水嶺解 (scattor)：Peanut∗Large Disk ∗Small Disk の成すネットワーク構造．つながり具合は Peanut scattor が Hopf 分岐を境に変化する．消滅するときには Small Disk が関与するが，これは Large Disk とサドルノード分岐を介してつながっている．図はすべて v-成分のみ表示．

限次元系に帰着することができる．それにより粒子解の振る舞いの数学的特徴付けを行うことができる．これについても時間が許せば触れたいと思う．

4　結語

Turing の seminal な文献 [1] の第１３節は ”Non-linear theory, Use of digital computers” というものであり，現在の計算機を活用する数学を既に予期していた．実際，Turing はそのような高速計算機で様々な問題を解くことを夢想していたに違いない．ここで述べた「不安定構造」からの視点はその後の力学系や構造探索型の数値解析 (AUTO, 計算 Homology, 精度保証など)，そして計算機の能力の飛躍的発展なくしては，なかなか実現できない立場であろう．複雑微妙なパターンダイナミクスの全体像はまだまだ道半ばである．ここでは書ききれなかった多くの重要な実験，理論もある．しかし不安定ではあ

るが単純な秩序解及びそのネットワークから見ると，その一端が浮かび上がるという視点は，今後の研究の一つの方向を与えるかもしれないと期待している．

参考文献

この予稿においてはページ数の制約のため以下の文献は網羅的からはほど遠く，多くの重要な文献が落ちている．より充実したものを別の機会に作りたいと考えている．

[1] A.Turing,*The Chemical Basis of Morphogenesis*, Phil.Trans.R.Soc.London B237(1952) 37-72.

[2] P.de Kepper, V.Castets, E.Dulos, J.Boissonade, *Turing-type Chemical Patterns in the Chloride-iodite-malonic acid Reaction*, Physica D 49(1991)1161-169.

[3] Vladimir.K. Vanag and Irving.R. Epstein, *Localized patterns in reaction-diffusion systems*, Chaos **17**, 037110 (2007).

[4] S. Nettesheim, A. von Oertzen,H.H. Rotermund and G. Ertl, *Reaction diffusion patterns in the catalytic CO-oxidation on Pt(110):Front propagation and spiral waves*, J. Chem. Phys. **98**(12), 9977 (1993).

[5] 西浦廉政,「自己複製と自己崩壊のパターンダイナミクス」岩波講座物理の世界, 岩波書店 (2003).

[6] Y. Nishiura and I. Ohnishi: *Some mathematical aspects of micro-phase separation in diblock copolymers*, Physica D **84**34-39 (1995).

[7] Yoshihito Oshita, *On stable nonconstant stationary solutions and mesoscopic patterns for FitzHugh-Nagumo equations in higher dimensions*, J. Differential Equations **188**, 110-134 (2003).

[8] Xinfu Chen and Yoshihito Oshita, *An Application of the Modular Function in Nonlocal Variational Problems*, Arch. rational Mech. Anal. **186**, 109-132 (2007).

[9] T. Teramoto and Y.Nishiura, *Double gyroid morphology in a gradient system with nonlocal effects*, J. Phys. Soc. Jpn., **71**(7): 1611-1614 (2002)

[10] , Hiroto Shoji, Kohtaro Yamada, Daishin Ueyama,and Takao Ohta, *Turing patterns in three dimensions*, Phys. Rev. E **75**, 046212 (2007)

[11] T.Kaczynski, K.Mischaikow, and M.Mrozek, *Computational Homology*, Applied Mathematical Sciences **157** Springer (2004).

[12] 寺本　敬，M.Gameiro:「複雑な空間パターンへの計算ホモロジーの応用」計算ホモロジーとその応用 (応用数理サマーセミナー 2007, 日本応用数理学会・北海道大学

数学 COE 共催), Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics, No.124 (2007) [in Japanese]
第２節の記述においてはこの講義録を参考にした.

[13] 寺本 敬、西浦 廉政: 「ミクロ相分離のモルフォロジーとダイナミクス」, 応用数理, 15(3) 16-27 (2005)

[14] Bjorn Sandstede and Arnd Sheel, *Absolute and convective instabilities of waves on bounded and large bounded domains*, Physica D **145**, 233-277 (2000).

[15] P.Gray and S.K.Scott,*Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: oscillations and instabilities in the system* $A + 2B \rightarrow 3B$, $B \rightarrow C$,Chem. Eng. Sci. Vol.39(1984) 1087-1097.

[16] J.E.Pearson., *Complex patterns in a simple system*, Science Vol.216(1993),189-192.

[17] M. Iima and Y. Nishiura, *Collision of localized traveling-wave convection cells in binary fluid*, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, **22** 289-303 (2005)

[18] Y. Nishiura, T. Teramoto, X. Yuan and K. Ueda, *Dynamics of traveling pulses in heterogeneous media*, Chaos, **17**(3) 037104 (2007)

[19] Y. Nishiura, T. Teramoto and K. Ueda, *Scattering of traveling spots in dissipative systems*, Chaos, **15** 047509-047519 (2005)

[20] Y. Nishiura, T. Teramoto and K. Ueda, *Dynamic transitions through scattors in dissipative systems*, Chaos **13**(3) 962-972 (2003)

[21] Y. Nishiura, T. Teramoto and K. Ueda, *Scattering and separators in dissipative systems*, Phys. Rev. E **67** 056210 (2003)

龍谷大学 理工学部 数理情報学科

森田　善久

私は、大学時代に生物モデルのパターン形成の問題に興味をもちましたが、大学院では時間遅れのある微分方程式の周期解の分岐問題を主に研究していました。その後、反応拡散方程式系のパターン形成やダイナミクスの研究で少し成果を出した後、Ginzburg-Landau 方程式の研究に長年取り組んできました。一方、５、６年くらい前から並行して反応拡散方程式の進行波解や全域解の研究も進めています。新しい問題に取り組むときの動機は単純で「こんなことができたらうれしいな」という漠然としたイメージです。そういう気持ちをもちながら研究していると、いつの間にかこれまで勉強してきたことや研究がつながり、新しい結果が得られることがよくあります。反応拡散系の問題は面白い問題がたくさんあるのですが、なかなか最初は難しく見えて取り掛かりがないかもしれません。しかし、こういうことをいつか証明したい、という気持ちを持ち続ければきっと道が見えてくるのではないかと思います。

冬の学校での講演は今回が初めてでしたが、多数の若い方々が熱心に聴講していた姿が印象的です。講演では、あまりテクニカルなことを話すより、アイデアや面白さが伝わるような説明を心がけていますが、今回の講演ではまだまだ準備不足のところもあり、十分満足できなかった参加者もおられると思います。これからまた機会があれば、アンケートのご意見を参考に改善したいと思っています。最後に、世話人の大阪大学の小川知之さん、明治大学の上山大信さん、明治大学の三村昌泰先生とその関係者の方には心からお礼申し上げます。

反応拡散方程式における平衡解の安定性解析入門

森田 善久 (Yoshihisa Morita)

龍谷大学理工学部数理情報学科
(Depatment of Applied Mathematics and Informatics
Ryukoku University)

e-mail: morita@rins.ryukoku.ac.jp

概要

有界領域におけるノイマン境界条件下の反応拡散方程式および反応拡散方程式系を考える．方程式がエネルギー汎関数の勾配系になっている場合には，解は漸近的に平衡解の集合に近づくので，自明でない安定平衡解の存在は重要な研究テーマである．空間1次元でスカラーの双安定な方程式においては，拡散係数が小さい場合，遷移相のある解の存在と安定性が変分的な手法により同時に議論できる．実際，存在と安定性の条件はある縮約エネルギーの条件に帰着される．このとき安定な非定数解の存在には反応項の空間変数に関する依存性が本質的である．一方，空間次元が2次元以上の2変数の系においては，反応項が空間変数に依存しない場合でも，領域の位相や幾何学的条件によって安定な非定数解が存在する場合がある．これらの結果について概説する．

1　1次元反応拡散方程式

この節では，有限区間上のスカラーの反応拡散方程式の平衡解を扱う．特に，変分的な観点から解の存在と安定性を見通しよく議論できることを解説する．

1.1　基本的性質

次の有限区間における反応拡散方程式を考える：

$$(1.1.1)\qquad \begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u,x) & (0 < x < L, t > 0) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

ここで $f(u,x)$ は十分滑らかな関数 (少なくとも C^1 級) とする．この初期値問題の解を $u(x,t;u_0)$ と表す．すなわち, $u(\cdot,0;u_0)=u_0(\cdot)$ とする．(1.1.1) の定常問題は

$$
\begin{cases} u_{xx}+f(u,x)=0 & (0<x<L), \\ u_x(0)=u_x(L)=0, \end{cases} \tag{1.1.2}
$$

である．

エネルギー汎関数を

$$
\mathcal{E}(u):=\int_0^L \left(\frac{1}{2}u_x^2-F(u,x)\right)dx, \qquad F(u,\cdot):=\int_0^u f(s,\cdot)ds \tag{1.1.3}
$$

で定義すると，(1.1.2) は $\mathcal{E}(u)$ の $H^1(0,L)$ におけるオイラー・ラグランジュ方程式である．実際,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\mathcal{E}(u+sv)_{|s=0} \\
&\quad =\int_0^L (u_x v_x - f(u,x)v)dx \\
&\quad =[u_x v]_0^L - \int_0^L (u_{xx}+f(u,x))vdx = 0
\end{aligned}
$$

より (1.1.2) が得られる．

一方, (1.1.1) は $\mathcal{E}$ の勾配系

$$
u_t=-\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta u} \tag{1.1.4}
$$

と表される．(1.1.1) の解に対して

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{E}(u(\cdot,t;u_0))=-\int_0^L |u_t(\cdot,t;u_0)|^2dx \le 0 \tag{1.1.5}
$$

は容易に確かめられる．

(1.1.1) の解によって $H^1(0,L)$ 上の半流 (semi-flow)$\{S(t)\}_{t\ge 0}$ が

$$
S(t)u_0 := u(\cdot,t;u_0) \tag{1.1.6}
$$

によって定義される．

$$
\gamma^+(u_0)=\{S(t)u_0 \ : \ 0\le t<+\infty\}
$$

は u_0 を通る正軌道 (positive orbit) とよばれ，$t \le 0$ に対して解が延長されるとき

$$\gamma^-(u_0) = \{S(t)u_0 \ : \ -\infty < t \le 0\}$$

は負軌道 (negative orbit) とよばれる．$\gamma(u_0) = \gamma^+(u_0) \cup \gamma^-(u_0)$ を全軌道 (entire orbit) という．$S(t)$ が作用する空間 $X = H^1(0, L)$ は相空間とよばれる．

注意 1 一般に反応拡散方程式は時間逆向きに解けないが，もし負の方向に延長できる場合は一意であることが知られている (Henry [6, 7]).

大切な概念として，$S(t)U \subset U$ $(\forall t \ge 0)$ を満たす集合 U を正不変集合 (positively invariant set), 一方 $S(t)U \subset U$ $(\forall t \le 0)$ を満たす場合は負不変集合 (negatively invariant set) という．さらに $S(t)U \subset U$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ が満たされる場合は単に不変集合 (invariant set) という．(1.1.1) の平衡解 (定常問題の解) は相空間の点とみると不変集合である．

通常の力学系のように ω-極限集合や α-極限集合が定義される：

$$\omega(u_0) = \bigcap_{\tau \ge 0} \overline{\bigcup_{t \ge \tau} S(t)u_0}$$

$$\alpha(u_0) = \bigcap_{\tau \ge 0} \overline{\bigcup_{-\tau \le t \le 0} S(t)u_0}$$

軌道のコンパクト性よりこれらの集合は空集合でなければコンパクトな不変集合である．

漸近挙動について次の重要な補題が成り立つ．

補題 1.1 (1.1.1) の任意の解 $u(\cdot, t; u_0)$ についてその ω-極限集合は一つの平衡解のみからなる．

証明は文献 Matano[13] を見よ．

1.2 線形化安定性

$u = u^*(x)$ を定常問題 (1.1.2) の解とする．すなわち，

$$\begin{cases} u^*_{xx} + f(u^*, x) = 0 & (0 < x < L), \\ u^*_x(0) = u^*_x(L) = 0, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

を満たす．(1.1.1) に $u=u^*(x)+e^{-\lambda t}v(x)$ を代入し，$v(x)$ の 1 次の項を取り出すと次の線形化固有値問題が得られる．

$$\begin{cases} v_{xx}+f_u(u^*,x)v=-\lambda v \qquad (0<x<L), \\ v_x(0)=v_x(L)=0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

一方，エネルギー汎関数 $\mathcal{E}$ の第 2 変分

$$\mathcal{K}[v,v]:=\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{E}(u+sv)_{|s=0}=\int_0^L(v_x^2-f_u(u^*,x)v^2)dx \tag{1.2.3}$$

において, $\|v\|_{L^2}^2=1$ という拘束条件の下でのオイラー・ラグランジュ方程式は (1.2.2) である．また，固有値問題 (1.2.2) の第 1 固有値 λ_1 は

$$\lambda_1=\inf\{\mathcal{K}[v,v]\ :\ v\in H^1(0,L),\ \ \|v\|_{L^2}=1\ \} \tag{1.2.4}$$

と変分的に特徴付けられる．

次の結果が成り立つ．

補題 1.2 $\lambda_1>0$ なら $u^*(x)$ は (1.1.1) の漸近安定な平衡解である．また，$\mathcal{E}$ の局所最小化解 *(local minimizer)* でもある．一方, $\lambda_1<0$ なら不安定である．

$f=f(u)$ の場合には安定な解は定数解しかないことが以下のように証明できる．平衡解 u^* の導関数 u_x^* は,

$$(u_x^*)_{xx}+f_u(u^*(x))u_x^*=0, \qquad u_x^*(0)=u_x^*(L)=0 \tag{1.2.5}$$

を満たす．u_x^* を $\mathcal{K}$ に代入すると

$$\begin{aligned}\mathcal{K}[u_x^*,u_x^*]&=\int_0^L((u_{xx}^*)^2-f_u(u^*)(u_x^*)^2)dx\\ &=[u_x^*u_{xx}^*]_0^L-\int_0^L\{(u_{xxx}^*+f_u(u^*)u_x^*\}u_x^*dx=0\end{aligned}$$

より, (1.2.4) を使うと $\lambda_1\le 0$ である．$\lambda_1<0$ なら補題 1.2 より不安定である．よって $\lambda_1=0$ と仮定する．このとき u_x^* は $\mathcal{K}$ の最小値を実現する関数なので $\lambda_1=0$ は (1.2.2) の第 1 固有値でその u_x^* はその固有関数である．よって, 境界条件 $u_{xx}^*(0)=u_{xx}^*(L)=0$ を満たす．この事実と (1.2.5) より，常微分方程式の初期値問題に関する解の一意性から $u_x^*(x)\equiv 0$ でなければならない．これは u^* が定数解に他ならないことを意味する．□

1.3　遷移層を持つ解の構成と安定性

この節では２つの安定な状態を結ぶ遷移層を持つ解を構成する．考える方程式は

$$(1.3.1)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2\phi_{xx}+f(\phi,x)=0 & (0<x<L), \\ \phi_x(0)=\phi_x(L)=0, \end{cases}$$

とする．前節でみたように f が空間変数 x に依存しない場合は不安定な解しか構成できないが,

$$f(u,x)=(1-u^2)(u-a(x)),\qquad -1<a(x)<1$$

のような非一様 $a(x)$ に対して ε が十分小さいとき $\phi=-1$ と $\phi=1$ を結ぶ安定な遷移層を持つ解が構成できることを示す.

この節の議論は Ei-Kuwamura-Morita[1] による．また，関連した先行研究として Nakashima-Tanaka[15] がある (Kath-Knessl-Matokowsky[12] も参照するとよい).

与えられた $0<\ell<1$ に対して, 次の２つの境界値問題を考える：

$$(1.3.2)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2\dfrac{d^2\phi_1}{dx^2}+f(\phi_1,x)=0, & 0<x<\ell, \\ \phi_{1x}(0)=0,\quad \phi_1(\ell)=\alpha, \end{cases}$$

$$(1.3.3)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2\dfrac{d^2\phi_2}{dx^2}+f(\phi_2,x)=0, & \ell<x<1, \\ \phi_{2x}(1)=0,\quad \phi_2(\ell)=\alpha. \end{cases}$$

(1.3.2) と (1.3.3) の解をそれぞれ $\phi_1(x)=\phi_1(x;\ell,\alpha)$ と $\phi_2(x)=\phi_2(x;\ell,\alpha)$ とする．簡単に，$\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ としばしば表す．これらの２つの解を繋げて区間 $(0,1)$ の関数 ϕ を

$$(1.3.4)\qquad \phi(x)=\phi(x;\ell,\alpha)=\begin{cases} \phi_1(x;\ell,\alpha), & 0<x\le\ell \\ \phi_2(x;\ell,\alpha), & \ell<x<1 \end{cases}.$$

によって定義する．このとき，$\phi(x)$ が (1.3.1) の解になる必要十分条件は次の C^1 適合条件

$$(1.3.5)\qquad \phi_{1x}(\ell)=\phi_{2x}(\ell)$$

が見たされることである．

さてエネルギー関数

$$(1.3.6)\qquad \mathcal{E}_\varepsilon(\phi) := \int_0^L \left(\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_x^2 - F(\phi,x)\right)dx, \qquad F(\phi,\cdot) := \int_0^\phi f(\cdot,s)ds$$

を通して，適合条件 (1.3.5) がどのように解釈されるか見よう．次の $\phi(x;\ell)$ に対するエネルギー $E_\varepsilon(\ell)$ を導入する．

$$(1.3.7)\qquad E(\ell) := \mathcal{E}_\varepsilon(\phi(\cdot;\ell)).$$

(1.3.4) の定義から $E(\ell)$ は, 次のように $E_1(\ell)$ と $E_2(\ell)$ に分解できる：

$$(1.3.8)\qquad E(\ell) = E_1(\ell) + E_2(\ell),$$

$$(1.3.9)\qquad E_1(\ell) := \mathcal{E}_1(\phi_1(\cdot;\ell)) = \int_0^\ell \left(\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_{1x}^2 - F(\phi_1,x)\right)dx,$$

$$(1.3.10)\qquad E_2(\ell) := \mathcal{E}_2(\phi_2(\cdot;\ell)) = \int_\ell^1 \left(\frac{\varepsilon^2}{2}\phi_{2x}^2 - F(\phi_2,x)\right)dx.$$

次の命題が成り立つ．

命題 1.3 $\phi_1(x;\ell)$ と $\phi_2(x;\ell)$ を それぞれ (1.3.2) と (1.3.3) の解とし，(x,ℓ) について連続的微分可能とする．このとき

$$(1.3.11)\qquad \frac{dE(\ell)}{d\ell} = -\frac{\varepsilon^2}{2}(\phi_{1x}^2(\ell;\ell) - \phi_{2x}^2(\ell;\ell))$$

が成り立つ．

次の系は 命題1.3 からすぐ導かれる．

系 1.4 命題1.3 の条件を仮定する．ℓ^* は

$$(1.3.12)\qquad \left.\frac{dE(\ell)}{d\ell}\right|_{\ell=\ell^*} = 0, \quad \phi_{1x}(\ell^*;\ell^*) + \phi_{2x}(\ell^*;\ell^*) \neq 0.$$

を満たすとすると，(1.3.4) で定義される $\phi(x;\ell^*)$ は (1.3.1) の解である．

注意 2 ℓ^* を C^1-適合する点とすると $\ell=\ell^*$ は $E(\ell)$ の臨界点を与える．一方，$\phi=\phi(\cdot\,;\ell^*)$ は $\mathcal{E}_\varepsilon$ の臨界点であるので, $E(\ell)$ は $\mathcal{E}_\varepsilon$ から引き継ぐ変分構造をもった最小のエネルギーになっているかもしれない．次の節では，解 $\phi(\cdot\,;\ell^*)$ の安定性は，ある条件のもとで $E(\ell)$ の凸性によって決定することを示す．これによって $E(\ell)$ は元のエネルギーの縮約になっているといえる．

次に，少し形式的な議論によって $\varepsilon\to 0$ としたとき, 条件 (1.3.11) は (1.3.1) の遷移層を持つ解のよく知られた存在条件と一致することを示そう．そのため次の等式を用意する．

補題 1.5 命題 1.3 と同じ条件を仮定する．このとき

$$\frac{dE(\ell)}{d\ell}=\int_0^\ell f(\phi_1,x)\phi_{1x}\,dx+\int_\ell^1 f(\phi_2,x)\phi_{2x}\,dx. \tag{1.3.13}$$

が成り立つ．

遷移層のある平衡解を考えよう．$\phi_1(x)$ は単調増加とする．このとき

$$\int_0^\ell f(\phi_1,x)\phi_{1x}\,dx=\int_{\phi_1(0)}^{\phi_1(\ell)} f(s,\phi_1^{-1}(s))\,ds, \tag{1.3.14}$$

ここで，積分を $s=\phi_1(x)$ と変換している．ε が十分小さいとき，(1.3.14) の積分が効く範囲では $\phi_1^{-1}(s)=\ell+O(\varepsilon)$ としてよい.

さらに，$\phi_1(0)\approx -1$ で $\phi_1(\ell)=0$ より, (1.3.14) は

$$\int_0^\ell f(\phi_1,x)\phi_{1x}\,dx=\int_{-1}^0 f(s,\ell)\,ds+O(\varepsilon) \tag{1.3.15}$$

となる．同様に

$$\int_\ell^1 f(\phi_2,x)\phi_{2x}\,dx=\int_0^1 f(s,\ell)\,ds+O(\varepsilon). \tag{1.3.16}$$

こうして (1.3.13) から

$$\frac{dE(\ell)}{d\ell}=\int_{-1}^1 f(s,\ell)\,ds+O(\varepsilon) \tag{1.3.17}$$

が得られる．(1.3.12) は C^1 適合条件で遷移層の解の存在を保障するが, (1.3.17) で $\varepsilon\to 0$ とすると，よく知られた条件 (Fife[2] や Hale-Sakamoto[4] を参照)

$$\int_{-1}^1 f(u,\ell^*)\,du=0,$$

を得る．

1.4 安定性条件

前節の (1.3.12) で得られた遷移層解 $\phi(\cdot;\ell^*)$ の安定性を議論する．ここで $\ell=\ell^*$ は $dE(\ell^*)/d\ell=0$ を満たす．エネルギー (1.3.4) の局所最小化解は勾配系である反応拡散方程式の安定解でもあった．また，逆もいえる．そこで，局所最小化解の性質を見ておこう．

定義 1 次の条件が満たされるとき，$\phi_j(x;\ell)$ を $\mathcal{E}_j$ の $X_j(\ell)$ における非退化な局所最小化解とよぶ：

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{E}_j(\phi_j+s\psi)_{|s=0}>0,\quad \forall\psi\in X_j,\ \ \|\psi\|_{L^2(I_j)}=1,$$

ここで $I_1=(0,\ell), I_2=(\ell,1)$, $X_1=\{u\in H^1(0,\ell)\,:\,u(\ell)=0\}$, $X_2=\{u\in H^1(\ell,1)\,:\,u(\ell)=0\}$.

非退化な局所最小化解に対して次の結果が成り立つ．

補題 1.6 $\phi_j(x;\ell)$ $(j=1,2)$ を非退化な $\mathcal{E}_j$ の局所最小化解とする．このとき $j=1$ に対する (1.3.2) の線形化固有値問題や $j=2$ に対する (1.3.3) のそれは正の固有値のみを持つ． さらに，$\phi_j(x;\ell)$ と $\phi_{jx}(x;\ell)$ は ℓ に関して連続的微分可能である．

次の定理は，各区間における解を張り合わせてできる平衡解についての安定性を保障する条件を与える．

定理 1.7 $\phi_1(x;\ell)$ と $\phi_2(x;\ell)$ をそれぞれ (1.3.2) と (1.3.3) の解とし，$\phi(x;\ell)$ を (1.3.4) によって定義される関数とする．ℓ^* は $E(\ell)=\mathcal{E}_\varepsilon(\phi(\cdot;\ell))$ の臨界点を与え

$$\phi_x(x;\ell^*)|_{x=\ell^*}\neq 0. \tag{1.4.1}$$

を仮定し，$\delta_0=\min\{\ell^*,1-\ell^*\}$ とおく．$|\ell-\ell^*|<\delta$ なる ℓ に対して，$\phi_1(x;\ell)$ と $\phi_2(x;\ell)$ がそれぞれ

$$X_1(\ell)=\{u\in H^1(0,\ell)\,:\,u(\ell)=0\},$$

$$X_2(\ell)=\{u\in H^1(\ell,1)\,:\,u(\ell)=0\}$$

における $\mathcal{E}_1[u]$, $\mathcal{E}_2[u]$ の非退化な局所最小化解となるような $\delta<\delta_0$ がとれるとする．このとき ℓ^* が $|\ell-\ell^*|<\delta$ において $E(\ell)$ の最小値と与えるとすると，$\phi(x;\ell^*)$ は $H^1(0,1)$ における $\mathcal{E}_\varepsilon[u]$ の局所最小化解である．

Proof. $\psi \in H^1(0,1)$ を $\phi(x;\ell^*)$ に対する摂動として取る．$C[0,1] \subset H^1(0,1)$ は

$$\sup_{0\le x\le 1} |\psi(x)| \le ||\psi||_{H^1} < \delta_1,$$

と埋め込まれているので，(1.4.1) と $\phi(\ell^*;\ell^*) = 0$ に注意して δ_1 を十分小さくとると，$|\ell_0 - \ell^*| < \delta$ を満たすある ℓ_0 が存在して

$$\phi(\ell_0;\ell^*) + \psi(\ell_0) = 0$$

が成り立つ．

$$\tag{1.4.2} \begin{aligned} \tilde{\psi}(x) &= \phi(x;\ell^*) + \psi(x) - \phi(x;\ell_0) \\ &= \phi(x;\ell^*) - \phi(x;\ell_0) + \psi(x) \end{aligned}$$

とおく．このとき，$\tilde{\psi}(x) \in H^1(0,1)$ で，$\phi(\ell_0;\ell_0) = 0$ から $\tilde{\psi}(\ell_0) = 0$. よって

$$\tag{1.4.3} \begin{aligned} &(\phi(x;\ell_0) + \tilde{\psi}(x))|_{[0,\ell_0]} = \phi_1(x;\ell_0) + \tilde{\psi}_1(x) \in X_1(\ell_0) \\ &(\phi(x;\ell_0) + \tilde{\psi}(x))|_{[\ell_0,1]} = \phi_2(x;\ell_0) + \tilde{\psi}_2(x) \in X_2(\ell_0), \end{aligned}$$

ここで，区間 $[0,\ell_0]$ と $[\ell_0,1]$ に制限した $\tilde{\psi}_1(x) = \tilde{\psi}(x)|_{[0,\ell_0]}$ と $\tilde{\psi}_2(x) = \tilde{\psi}(x)|_{[\ell_0,1]}$ は，それぞれ $\tilde{\psi}_{1x}(0) = \tilde{\psi}_1(\ell_0) = 0$ と $\tilde{\psi}_{2x}(1) = \tilde{\psi}_2(\ell_0) = 0$ を満たす．こうして，$\phi(x;\ell^*)$ に対する任意の摂動 $\psi(x)$ は，$\phi(x;\ell_0)$ への摂動 $\tilde{\psi}(x)$ に移され $X_1(\ell_0)$ と $X_2(\ell_0)$ への分解を考えることができる.

(1.4.2), (1.4.3) と， ϕ_1 と ϕ_2 がそれぞれ X_1, X_2 における $\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_2$ の局所最小化解という仮定を使うと

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(\phi(\cdot;\ell^*) + \psi) \\ &= \mathcal{E}(\phi(\cdot;\ell_0) + \tilde{\psi}) \\ &= \mathcal{E}_1(\phi_1(\cdot;\ell_0) + \tilde{\psi}_1) + \mathcal{E}_2(\phi_2(\cdot;\ell_0) + \tilde{\psi}_2) \\ &\ge \mathcal{E}_1(\phi_1(\cdot;\ell_0)) + \mathcal{E}_2(\phi_2(\cdot;\ell_0)) \\ &= \mathcal{E}(\phi(\cdot;\ell_0)). \end{aligned}$$

$E(\ell) = \mathcal{E}(\phi(\cdot;\ell))$ なので，$|\ell - \ell^*| < \delta$ の範囲で $\ell = \ell^*$ で最小値をとるという仮定から

$$\mathcal{E}(\phi(\cdot;\ell_0)) \ \ge\ \mathcal{E}(\phi(\cdot;\ell^*)).$$

これで証明が完了した． □

次に上の定理を縮約エネルギー E の凸性の観点から見直し，安定性を決定する十分条件別な観点から与えよう．まず，$\phi(x;\ell^*)$ の安定性と線形化固有値問題

$$
\begin{cases} \varepsilon^2 v_{xx} + f_u(\phi(x;\ell^*),x)v = -\lambda v, \\ v_x(0) = v_x(1) = 0. \end{cases} \tag{1.4.4}
$$

の関係を詳しくみる．(1.4.4) の全ての固有値が正ならば $\phi(x;\ell^*,\alpha^*)$ は安定であった．(1.4.4) の第 1 固有値は

$$
\lambda_1 = \min\{\,\mathcal{K}[v,v] \,:\, v \in H^1(0,1),\, ||v||_{L^2} = 1\,\},
$$

で与えられる．ここで

$$
\mathcal{K}[v,v] := \int_0^1 \{\varepsilon^2 v_x^2 - f_u(\phi(x;\ell^*),x)v^2\}\,dx,
$$

よって $\lambda_1 > 0$ なら全ての

$$
v \in H^1(0,1), \qquad ||v||_{L^2} = 1
$$

に対して $\mathcal{K}[v,v] > 0$ となり $\phi(x;\ell^*)$ は安定であった. この事実は次の形式的な展開から容易に理解できる．

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}(\phi(x;\ell^*) + v) - \mathcal{E}(\phi(x;\ell^*)) \\
&= \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta u}(\phi(x;\ell^*)v + \frac{1}{2}\frac{\delta^2\mathcal{E}}{\delta u^2}(\phi(x;\ell^*)) \circ (v,v) + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{K}[v,v] + \cdots\,,
\end{aligned} \tag{1.4.5}
$$

ここで $\phi(x;\ell^*)$ は平衡解なので $\dfrac{\delta\mathcal{E}}{\delta u}(\phi(x;\ell^*)) = 0$ が成り立つことを使った.

$\mathcal{K}[v,v]$ を評価するため, 次の補題を用意する.

補題 1.8 v を

$$
v(x) = a\,\frac{\partial\phi}{\partial\ell}(x;\ell^*) + \tilde{v}(x), \tag{1.4.6}
$$

と分解する，ここで

$$a = v(\ell^*) \Big/ \frac{\partial \phi}{\partial \ell}(\ell^*; \ell^*),$$

$\tilde{v} \in H^1(0,1)$ は $\tilde{v}(\ell^*) = 0,\ \tilde{v}_x(0) = \tilde{v}_x(1) = 0$ を満たす．このとき

$$\mathcal{K}[v,v] = a^2 \mathcal{K}[\partial\phi/\partial\ell, \partial\phi/\partial\ell] + \mathcal{K}[\tilde{v}, \tilde{v}]. \tag{1.4.7}$$

$\mathcal{K}[\phi_\ell, \phi_\ell]$ の符号を調べるために次の等式を使う．

命題 1.9

$$\frac{d^2 E(\ell)}{d\ell^2} = f(0,\ell)(\phi_{1x}(\ell;\ell) - \phi_{2x}(\ell;\ell)) + \mathcal{K}_1[\phi_{1\ell}, \phi_{1\ell}] + \mathcal{K}_2[\phi_{2\ell}, \phi_{2\ell}], \tag{1.4.8}$$

ここで

$$\mathcal{K}_1[v_1, v_1] := \int_0^\ell \left\{\varepsilon^2 (v_1)_x^2 - f_u(\phi_1(x;\ell),\, x)(v_1)^2\right\} dx,$$

$$\mathcal{K}_2[v_2, v_2] := \int_\ell^1 \left\{\varepsilon^2 (v_2)_x^2 - f_u(\phi_2(x;\ell),\, x)(v_2)^2\right\} dx.$$

次の定理はこの節の主結果である．

定理 1.10 (1.4.1) を仮定する．$\phi(x;\ell^*)$ は $\mathcal{E}_1(u)$ と $\mathcal{E}_2(u)$ の非退化な局所最小化解 $\phi_1(x;\ell^*)$ と $\phi_2(x;\ell^*)$ を繋ぎ合わせたものとする，ただし，それぞれのエネルギーは

$$X_1 = \{u \in H^1(0,\ell^*)\,;\ u(\ell^*) = 0\}, \quad X_2 = \{u \in H^1(\ell^*, 1)\ :\ u(\ell^*) = 0\}$$

で考える．このとき (1.3.1) の平衡解 $\phi(x;\ell^*)$ は

$$\left.\frac{d^2 E(\ell)}{d\ell^2}\right|_{\ell=\ell^*} > 0 \quad (\ \mathit{resp.} < 0\ ), \tag{1.4.9}$$

のとき安定（resp. 不安定）である．

Proof. $\mathcal{K}[v,v] > 0$ (resp. < 0) を示せば十分である．(1.4.5) の展開とそれぞれの区間で局所最小化解であることを使えば, $\mathcal{K}[\tilde{v},\tilde{v}] > 0$ が確かめられる．一方，C^1-適合点 $\ell = \ell^*$ では (1.4.8) から

$$\mathcal{K}[\phi_\ell(x;\ell^*), \phi_\ell(x;\ell^*)] = \left.\frac{d^2 E(\ell)}{d\ell^2}\right|_{\ell=\ell^*}$$

である．これから結論が従う． □

注意 3 この節では遷移層は一つの場合しか扱わなかった．一般に n 個の遷移層を持つ解の存在と安定性については [1] を参照するとよい．

2　勾配系とリャプノフ関数

この節ではあるエネルギー汎関数に関する2変数の勾配系 (gradient system) と，リャプノフ関数をもつ勾配的系 (gradient-like system) についてその性質を解説する．以下，Ω は滑らかな境界をもつ有界な領域 (1次元の場合は区間) とする．

2.1　2変数の勾配系

次のエネルギー汎関数

$$\mathcal{E}(u,v) := \int_\Omega \left\{ \frac{d_1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{d_2}{2}|\nabla v|^2 + F(u,v) \right\} dx \tag{2.1.1}$$

を考える．変分

$$\frac{d}{ds}\mathcal{E}(u+s\varphi, v+s\psi)_{|s=0} = 0$$

よりオイラー・ラグランジュ方程式

$$\begin{cases} d_1\Delta u - F_u(u,v) = 0 \\ d_2\Delta v - F_v(u,v) = 0 \end{cases} \quad (x\in\Omega), \qquad \frac{\partial u}{\partial\nu} = \frac{\partial v}{\partial\nu} = 0 \quad (x\in\partial\Omega) \tag{2.1.2}$$

を得る．この方程式は，また，(2.1.1) の勾配系

$$\begin{cases} u_t = d_1\Delta u - F_u(u,v) \\ v_t = d_2\Delta v - F_v(u,v) \end{cases} \quad (x\in\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial\nu} = \frac{\partial v}{\partial\nu} = 0 \quad (x\in\partial\Omega) \tag{2.1.3}$$

の平衡解を与える方程式になっている．(2.1.3) の解 $(u(x,t), v(x,t))$ について

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) = -\int_\Omega (|u_t|^2 + |v_t|^2)dx \le 0$$

を確かめるのは容易い．

例：$F(u,v) = \frac{\lambda}{4}(1-u^2-v^2)^2$ のとき，その勾配系は

$$\begin{cases} u_t = d_1\Delta u + \lambda(1-u^2-v^2)u \\ v_t = d_2\Delta v + \lambda(1-u^2-v^2)v \end{cases} \qquad (x\in\Omega) \tag{2.1.4}$$

となる．ここで境界条件を表記するのを省略した．特に $d := d_1 = d_2$ のとき複素変数 $\psi = u + iv$ で表すと (2.1.4) は Ginzburg-Landau 方程式

$$\psi_t = d\Delta\psi + \lambda(1 - |\psi|^2)\psi \tag{2.1.5}$$

となる．

(2.1.3) のような勾配系は，一般的にその解の軌道の ω-極限集合は平衡解からなることが知られている ([3]). よって非自明な平衡解の安定性が空間的なパターンを生成できるかどうかを決定する．ところが一般に次の定理が成り立つ．

定理 2.1 領域 Ω を凸領域とする．このとき (2.1.3) の全ての非定数平衡解は不安定である．

証明は Jimbo-Morita[8] または [10] を参照せよ．

この定理により安定な非定数解を構成するためには領域に特殊な条件が必要である．Ginzburg-Landau 方程式の場合には以下のことが分かっている．

定理 2.2 領域 Ω から S^1 上への連続関数全体の集合 $C(\overline{\Omega}; S^1)$ のホモトピー類を考える．領域は定値写像とホモトピー同値でないような非自明な位相を持つと仮定する．このとき，各ホモトピー類の写像 γ に対して，ノイマン境界条件下の (2.1.5) の平衡解で γ とホモトピー同値なものが十分大きい λ に対して存在し安定である．

証明は Jimbo-Morita-Zhai[11] または [10] を参照するとよい..

この定理により，非自明な安定解の存在には領域の位相的な条件が大きく関与していることがわかる．一方で，領域が 3 次元以上ならこの定理によって構成された解を用いて非凸な可縮な領域でも安定解の存在が証明できる．実際，ドーナツ領域で定理を適用して安定解を構成し，その穴を薄い膜状の領域で埋めれば領域の摂動問題に帰着できる．

定理 2.3 3 次元以上の非凸な可縮領域で，十分大きな λ に対し安定な非定数解が存在するようなものがある．

詳しくは [9] または [10] を見よ．

2.2 勾配的系

一般に反応拡散方程式系

$$
(2.2.1) \qquad \begin{cases} u_t = d_1\Delta u + f(u,v) \\ v_t = d_2\Delta v + g(u,v) \end{cases} \quad (x \in \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad (x \in \partial\Omega)
$$

を考える．適当な相空間 X で次の性質を満たす汎関数 $\mathcal{H}(u,v)$ が存在するとき勾配系と同じような性質をもつ：

1) $\mathcal{H}(u,v) \geq C$ $(\forall u, v \in X)$ がなりたつ定数 C が存在する．

2) (2.2.1) の解 $(u(x,t), v(x,t))$ に対して

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{H}(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) \leq 0.
$$

3) (2.2.1) の解 $(u(x,t), v(x,t))$ に対して $\mathcal{H}(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) = constant$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ が成り立てば $(u(x,t), v(x,t))$ は (2.2.1) の平衡解である．

このような汎関数 $\mathcal{H}$ はリャプノフ関数とよばれる．勾配系の場合にはエネルギー汎関数がリャプノフ関数に他ならないが，一般には勾配系でなくてもこのようなリャプノフ関数が存在する場合がある．このとき，この系を勾配的系 (gradient-like system) とよぶことにする．実際，勾配的系ではその ω-極限集合は平衡解のみからなり，漸近的な状態は平衡解を調べればよい．

例：次の拡散の入った Lotka-Volterra 捕食系を考える．

$$
(2.2.2) \qquad \begin{cases} u_t = D_1\Delta u + r\left(1 - \dfrac{u}{K} - av\right)u \\ \\ v_t = D_2\Delta v + (-d + bu)v \end{cases} \qquad (x \in \Omega),
$$

ここで r, K, a, b, d は正の定数で $D_1, D_2 > 0$ とする．ノイマン境界条件

$$
(2.2.3) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad (x \in \partial\Omega)
$$

と非負の初期条件

$$
(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), \quad u_0(x), v_0(x) \geq 0 \ (x \in \Omega)
$$

を与える．このとき，$u(x,t), v(x,t) \geq 0$ $(t \geq 0)$ で，また，$u_0(x) \not\equiv 0, v_0(x) \not\equiv 0$ なら，各方程式について強最大値原理を適用して $u(x,t), v(x,t) > 0$ $(t > 0)$ が示せる．以下ではこのような解を考える．

容易にわかるのは，$K > d/b$ のとき正の定数平衡解

$$(u^*, v^*) = \left(\frac{d}{b}, \frac{r}{a}\left(1 - \frac{d}{bK}\right)\right) \tag{2.2.4}$$

が存在する．このとき次の汎関数を導入する．

$$\mathcal{H}(u,v) := \int_\Omega \left\{ \frac{b}{a}\left(u - u^* - u^* \log \frac{u}{u^*}\right) + \left(v - v^* - v^* \log \frac{v}{v*}\right) \right\} dx \tag{2.2.5}$$

この汎関数がリャプノフ関数になっていることを検証しよう．

まず，$\mathcal{H}(u,v) \geq 0$ $(\mathcal{H}(u^*,v^*) = 0)$ である．次に

$$\mathcal{H}(u,v) = \int_\Omega \left\{ \frac{b}{a}(u - u^* \log u) + (v - v^* \log v) \right\} dx + A$$

(A は定数) と書けることに注意して解 $(u(x,t), v(x,t))$ を代入して t で微分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{H}(u,v) = \int_\Omega [(b/a)u_t(1 - u^*/u) + v_t(1 - v^*/v)]dx \\
&= \int_\Omega (b/a)\{D_1 \Delta u + r(1 - u/K)u - auv\}(1 - u^*/u)dx \\
&\quad + \int_\Omega \{D_2 \Delta v + (-d + bu)v\}(1 - v^*/v)dx \\
&= -\int_\Omega (b/a)\{D_1 \nabla u \cdot \nabla(-u^*/u) + (r/K)(u - u^*)^2 + a(v - v^*)(u - u^*)\}dx \\
&\quad - \int_\Omega \{D_2 \nabla v \cdot \nabla(-v^*/v) - b(v - v^*)(u - u^*)\}dx \\
&= -\int_\Omega (b/a)\{D_1 |\nabla u|^2 (u^*/u^2) + (r/K)(u - u^*)^2\}dx \\
&\quad - \int_\Omega D_2 |\nabla v|^2 (v^*/v^2) dx \leq 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned}
&r(1 - u/K) - av = r(1 - u/K) - av - r(1 - u^*/K) + av^* \\
&= -\frac{r}{K}(u - u^*) - a(v - v^*), \\
&-d + bv = b(v - v^*)
\end{aligned}$$

に注意しておく．

さらに3) の条件を確かめるのも容易である．実際，このリャプノフ関数によって定数平衡解の大域的な安定性も同時に示される．

注意 4 (2.2.2) の係数が (正の) 変数係数になっている場合として

$$
\begin{cases}
u_t = \mathrm{div}(D_1(x)\nabla u) + r(x)\left(1 - \dfrac{u}{K(x)} - a(x)v\right)u \\
\\
v_t = \mathrm{div}(D_2(x)\nabla v) + (-d(x) + b(x)u)v
\end{cases}
\tag{2.2.6}
$$

を考えることができる (境界条件はノイマン条件)．この方程式について正の平衡解 $(u^*(x), v^*(x))$ が存在すると仮定する．

$D_1(x) \equiv 0$ のとき

$$
V(u,v) = \int_\Omega v^* \left\{ \frac{b(x)}{a(x)} \left(u - u^* - u^* \log \frac{u}{u^*}\right) + \left(v - v^* - v^* \log \frac{v}{v^*}\right) \right\} dx
$$

を導入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(u,v) = &-\int_\Omega \frac{b(x)r(x)}{a(x)K(x)} v^*(u-u^*)^2 dx \\
&- \int_\Omega \frac{D_2(x)}{v^2}\{(v^* v_x - v v_x^*)^2 + (v^* v_y - v v_y^*)^2\} dx \le 0
\end{aligned}
$$

が確かめられる．一方，$D_2(x) \equiv 0$ のときは

$$
U(u,v) = \int_\Omega u^* \left\{ \left(u - u^* - u^* \log \frac{u}{u^*}\right) + \frac{a(x)}{b(x)} \left(v - v^* - v^* \log \frac{v}{v^*}\right) \right\} dx
$$

を導入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}U = &-\int_\Omega \frac{r(x)}{K(x)} u^*(u-u^*)^2 dx \\
&- \int_\Omega \frac{D(x)}{u^2}\{(u^* u_x - u u_x^*)^2 + (u^* u_y - v^* v_y)^2\} dx \le 0
\end{aligned}
$$

が確かめられる．

最後に最近の研究 [14] で見つかった勾配的系の例をあげよう．次の拡散方程式系を考える．

$$
\begin{cases} u_t = D_1 \Delta u + f(u) + kv \\ v_t = D_2 \Delta v - f(u) - kv \end{cases} \qquad (x \in \Omega). \tag{2.2.7}
$$

境界条件はノイマン条件である．

$$
F(u) = \int_0^u f(s) ds \geq C
$$

とする．$k > 0$ および $0 < D := D_1/D_2 < 1$ を仮定する．このとき

$$
\mathcal{H}(u,v) = \int_\Omega \left\{ \frac{D_1}{2} |\nabla u|^2 - (F(u) - \frac{kD}{2} u^2) + \frac{k}{2(1-D)} (Du + v)^2 \right\} dx
$$

を考えると

$$
\frac{d}{dt} \mathcal{H}(u,v) = -\int_\Omega (|u_t|^2 + \frac{k}{D_2} |\nabla (Du + v)|^2) dx \leq 0
$$

を確かめるのは容易である．

References

[1] S. Ei, M. Kuwamura and Y. Morita, A variational approach to singular perturbation problems in reaction-diffusion systems, Phys. D **207** (2005), 171-219.

[2] P.C. Fife, Transition layers in singular perturbation problems, J. Differential Equations **15** (1974) pp.77-105.

[3] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Math. Surveys and Monographs **25** A. M. S. 1988.

[4] J.K. Hale and K. Sakamoto, Existence and stability of transition layers, Japan J. Appl. Math **5** (1989) pp.367-405.

[5] J.A. Hemple, Multiple solutions for a class of nonlinear boundary value problems, Indiana Univ. Math. J. **20** (1971) pp.983-996.

[6] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[7] D. Henry, Some infinite-dimensional Morse Smale systems defined by parabolic partial differential equations, J. Differential Equations **59** (1985), 165-205.

[8] Stability of Non-constant Steady State Solutions to a Ginzburg-Landau Equation in Higher Space Dimensions, Nonlinear Anal., Vol.22 (1994), No.6, 753-770.

[9] S. Jimbo and Y. Morita, Stable Solutions with Zeros to the Ginzburg-Landau Equation with Neumann Boundary Condition, J. Differential Equations, Vol.128 (1996), No.2, 596-613.

[10] 神保秀一，森田善久著，岩波叢書「ギンツブルクーランダウ方程式と安定性解析」，岩波書店，2009.

[11] S. Jimbo, Y. Morita and J. Zhai, Ginzburg-Landau equation and stable steady state solutions in a non-trivial domain, Comm. Partial Differential Equations, Vol.20 (1995), No.11-12, 2093-2112.

[12] W.L. Kath, C. Knessl and B.L. Matkowsky, A variational approach to nonlinear singularly perturbed boundary-value problems, Stud. Appl. Math. **77** (1987) pp.61-88.

[13] H. Matano, Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **15** (1979), 401-454.

[14] Y. Morita and T. Ogawa, Stabilty and bifurcation of nonconstant solutions to a reaction-diffusion system with conservation of a mass, preprint.

[15] K. Nakashima and K. Tanaka, Clustering layers and boundary layers in spatially inhomogeneous phase transition problems, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **20** (2003) pp.107-143.

[16] Y. Nishiura and H. Fujii, Stability of singularly perturbed solutions to systems of reaction-diffusion equations, SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), pp.1726-1770.

大阪大学 基礎工学研究科

小川　知之

チューリング不安定性というのは、僕にはなかなか納得できずかなり紆余曲折していまに至っている気がします。その辺りのことは講義でもお話ししましたので繰り返しませんが、チューリングの洞察力の深さに改めて感心しています。サイエンスがこれからミクロに突き進もうという時代に、反応拡散系というもっとマクロで現象論的でより普遍性をもつ絡繰りがパターンを作る可能性があると主張したのです。先日、近藤滋さんが数学者にまさにこのような見方を提供して欲しいとおっしゃっていましたが、そのとおりだと思います。（近藤滋さんはチューリングダイナミクスの重要性を生物学に認めさせた方で、昨年の冬の学校でも講演していただいています。）しかしそれはそれとして、反応拡散系のパターンダイナミクスには数値計算しているだけでも、いろいろな不思議・発見があり楽しませてくれます。たとえて言えば、身近な山に登って、今まで気がつかなかった花や木や動物や雪の造形に魅せられるような喜びかもしれません。

反応拡散系に現れる振動パターン

小川 知之*

1　はじめに

Cross-Hohenberg によるレビュー [5] は 1990 年代初め頃までのパターン形成の話題を網羅的に書き記したことで知られる．いまでこそ少し古くなった感があるが，何しろたいした分量である．小見出しにして２００件あまり，引用論文が１３００件ぐらい．(いずれも数え切れないので，物差しで測った.）熱対流を始め流体の不安定性，液晶など物質科学のパターン形成，凝固の問題，非線形光学などの実験・モデルから始まり，Swift-Hohenberg 方程式，Kuramoto-Sivashinsky 方程式，反応拡散系，Ginzburg-Landau 方程式，振幅方程式など理論的なモデル，それらの不安定性などに関する数え切れないほどの研究結果がまとめてある．

これら２００件にものぼる項目を樹枝の末端と思えば，その樹枝構造の始まりのひとつが，A.Turing による 1952 年の論文 [14] といっても過言ではないであろう．今や時代はさらに 20 年経過し，散逸系のパターンダイナミクスの研究はますます盛んに研究されている．

しかし，あまり膨大な樹枝構造に圧倒されてもいけないので，ここはもう一度 A.Turing に戻って，その上で Cross-Hohenberg 以後の 20 年間の話題の一つであるウェーブ不安定化による振動パターンを紹介したい．ウェーブ不安定化という概念は，大域的なフィードバックに関連するような化学反応，生態学の問題などから 1990 年代になって見いだされた [7][9][12][16] が，実は Turing の原論文にもホンの少しだが言及がある．

この講義ではパターン形成に関連する偏微分方程式モデルに現れる挙動が分岐解析を通してどのように理解できるか，またその方法を紹介する．まずは一様な定常解の不安定化がいかにして生じるか，そのメカニズムをいくつかの典型的な現象に基づき解説する．線型安定性解析の結果，ある波数のモードが不安定化することがわかれば，発生するパターンの特徴的なサイズは予測可能である．しかしその際，本当に空間非一様な定常解が発生するのか，また高次元であれば同じ波数であっても

*大阪大学大学院基礎工学研究科

方向の異なるモードが同時に不安定化するはずで，これらの競合はどのように考えればよいのか．その鍵は分岐解析から得られる標準形という分岐方程式が握るが，その標準形は問題のもつ対称性で決まる．対称性は実は境界条件と密接な関係があるが，ここで扱う問題の多くは有限区間もしくは有限領域であり，その結果 SO(2) 対称性をもつ．従って，SO(2) 対称な標準形の高次の係数を問題毎に計算すればよい．

散逸系のパターンダイナミクスは非常に豊富な構造を持ち，今なお最前線で研究が進んでいる．分岐的な観点から理解できることは，そのうちの一部かもしれない．しかしながら一見特別ないくつかの問題を手計算で解析し，偏微分方程式のダイナミクスが数次元の常微分方程式系に帰着され，目に見えるようになるという体験は，これから新しい現象を解析するときの重要な足がかりになるであろう．

2 パターン発生の機構

空間的に何の特徴もないすなわち一様な状態からどのようにして何らかのパターンが発生するのだろうか．このような視点から見ると多くの現象に共通点があることがわかる．

熱対流であれ化学反応であれ，系の状態を制御するパラメーター p がある．まず一様な状態は p の値によらずに存在するとしよう．さらに， p の値が小さいときには系は一様な状態で落ち着いているが，p を大きくすると様々なパターンが観測されるようになるとしよう．これをもう少し精密に以下のように考えてみよう．一様解に波数が k で振幅の小さな擾乱を加える．すなわち ε を十分小さい正定数として一様解に $\varepsilon \cos kx$ を加える．p が小さいときには擾乱は減衰するだろう．一方 p が大きいと少なくとも適当な波数 k に対しては擾乱が増大するはずである．したがって擾乱が減衰するか増大するかの臨界点 $p = \phi(k)$ があるはずである．この $\phi(k)$ のグラフを中立安定曲線という．

簡単な例で中立安定曲線を描いてみよう．未知関数 $u(t, x)$ がまず次の拡散方程式に従うとしよう．

$$u_t = Du_{xx}$$

ここで，拡散係数 D は正定数とする．自明解 $u = 0$ に擾乱を加えて $u = e^{\lambda t} \cos kx$ を代入すると $\lambda = -Dk^2$ を得る．これはすなわち自明解の線形安定性をみていることにほかならないが，すべての擾乱が時間とともに指数的に減衰することを示している．

次に拡散方程式に増殖係数 p で増大する項を加え，

$$u_t = Du_{xx} + pu$$

を考えよう．今度は同様にして $\lambda = p - Dk^2$ を得る．したがって $p = \phi(k) = Dk^2$ が安定性の臨界である．すなわち中立安定曲線は原点を頂点とする放物線になる．こ

れは，パラメーター（増殖係数 p ）が正になると波数 $k=0$ から先に不安定化が生じるということを意味する．波数 $k=0$ の不安定化とは，空間一様解が常微分方程式 $\dfrac{du}{dt}=pu$ の解として不安定化するということである．したがってパターンの発生に繋がるものではない．もちろん波数 $k\neq 0$ の擾乱も $p=Dk^2$ で不安定化するが，この p の値ではすでに $k=0$ の擾乱のほうが強く不安定化しているので非零波数のパターンが観測されることは，普通はない．

このように考えると空間的に非一様な状態が発生するには中立安定曲線が $k=k_0\neq 0$ で最小値（頂点）をもつ必要がある．もしそうであれば波数 $k=k_0$ の擾乱が他の波数，特に 0 波数のものより（p の値にして）早く不安定化するので空間的に非自明なパターンが観測される形で発生し得る．以下，この条件を満たすような中立安定曲線をもつ例をいくつか紹介し中立安定曲線がそのような特性を持つに至った理由を議論しよう．

2.1 熱対流のレーリー・ベナール不安定性

水槽に入れた水を下方から暖めると下層の水が熱膨張により軽くなる．この状態は上下の温度差が一定値以上になると不安定になり（こらえきれなくなり）上下の循環流を生じる．これが熱対流とよばれるもので，粘性流体の方程式と熱方程式の結合で表すことができる．通常は浮力が温度に線形依存するという近似を用いたブシネ近似モデルで記述される．簡単のため流速・圧力と温度分布は 2 次元的であるとする．すなわち鉛直方向を z 軸にとった (x,y,z) 座標系で流速・圧力と温度分布は y に依存しないとしよう．従って流速ベクトル (u,v,w) は $v=0$ であり $\vec{u}=(u,w)$ のみで表せる．$\theta(x,z,t))$ を温度ゆらぎ，$p(x,z,t))$ を圧力ゆらぎとおくと，無次元化した方程式は以下のようになる．

$$\begin{cases} u_t+(\vec{u}\cdot\nabla)u &=& \Delta u-p_x \\ w_t+(\vec{u}\cdot\nabla)w &=& \Delta w-p_z+R\theta \\ \theta_t+(\vec{u}\cdot\nabla)\theta &=& (\Delta\theta+w)P^{-1} \\ u_x+w_z &=& 0 \end{cases}$$

ここで R はレイリー数と呼ばれ温度差に比例する．P はプラントル数と呼ばれ液体の物性によって決まる定数である．x,z 方向の波数がそれぞれ k,h である擾乱がいつ不安定化するかを計算してみよう．すなわち

$$(u,w,\theta,p)=(U,W,\Theta,P)\mathrm{e}^{\lambda t+ikx+ihz}$$

を上の方程式系の線形部分に代入して線形化方程式の時間発展を見よう．

$$\left\{\begin{array}{ccl} \dot{U} & = & -(k^2+h^2)U - ikP \\ \dot{W} & = & -(k^2+h^2)W - ihP + R\Theta \\ \dot{\Theta} & = & -\dfrac{k^2+h^2}{P}\Theta + \dfrac{W}{P} \\ ikU + ihW & = & 0 \end{array}\right.$$

第４式より $W = -kU/h$ ．また第４式の時間微分より $ik\dot{U} + ih\dot{W} = 0$．これと第１，２式より

$$ik\dot{U} + ih\dot{W} = -(k^2+h^2)(ikU + ihW) + (k^2+h^2)P + ihR\Theta$$

であり，したがって $P = -ihR\Theta/(k^2+h^2)$ である．これらより，以下のように各波数 (k,h) に対して２変数常微分方程式系に帰着する．

$$\left\{\begin{array}{ccl} \dot{U} & = & -(k^2+h^2)U - \frac{ihR}{k^2+h^2}\Theta \\ \dot{\Theta} & = & -\frac{kU}{Ph} - \dfrac{k^2+h^2}{P}\Theta \end{array}\right.$$

$(U,\Theta) = (0,0)$ の安定性は行列

$$M_{k,h} = -\begin{pmatrix} k^2+h^2 & \frac{khR}{k^2+h^2} \\ \frac{k}{Ph} & \frac{k^2+h^2}{P} \end{pmatrix}$$

できまる．$\mathrm{trace}M_{k,h} = -(k^2+h^2)(1+\frac{1}{P}) < 0$ なので中立安定性曲線は $\det M_{k,h} = 0$ で定まる．すなわち，

$$R = \frac{(k^2+h^2)^3}{k^2}$$

が得られる．例えば $h = \pi$ と固定し中立安定曲線を (k,R) 平面に描くと所望の形になる．実際，$k = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ で最小値をとり $R = R_c = \dfrac{27}{4}\pi^4$ は臨界レイリー数と呼ばれる．

2.2 局所活性化・側方抑制系

上で見たレイリー・ベナール不安定性は対流という物理現象の説明として重要であるが，非零波数の不安定化が生じた理由が明確になったとはいえないかもしれない．すなわち，中立安定曲線が $k \neq 0$ で頂点を持つ理由がもっと簡単にわかるモデルを紹介しよう．

セルが１次元集合上に十分細かく分布しておりある点でのセルのアクティビティが $u(t,x)$ で表されるとする．またセルどうしの相互作用がなければセルのアクティビティは指数 $a<0$ で減衰するとしよう．さらにアクティブなセルは直近のセルを

活性化するが一方で少し離れたセルは抑制すると考えよう．このような系は最も単純な場合次の微分積分方程式でモデル化される．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au + \int_{-\infty}^{\infty} w(x-y)u(y)dy \tag{2.1}$$

ここで $w(z)$ は相互作用の重み関数で上の条件をみたすには例えば次のような関数であればよい．

$$w(z) = \nu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 x^2} - \nu_2 \mathrm{e}^{-\mu_2 x^2}$$

ただし $\nu_1 > \nu_2 > 0$ かつ $\mu_1 > \mu_2 > 0$ とする．$u = \mathrm{e}^{\lambda t + ikx}$ を代入して，自明解 $u = 0$ の安定性をみよう．

$$\begin{aligned} \lambda &= a + \int_{-\infty}^{\infty} w(x-y)\mathrm{e}^{ik(y-x)}dy \\ &= a + \int_{-\infty}^{\infty} w(z)\mathrm{e}^{ikz}dz \\ &= a + \hat{w}(k) \end{aligned}$$

ここで，$\hat{w}(k)$ は $w(z)$ のフーリエ変換で，また $w(z)$ が偶関数対称性をもつことを使った．さて，$f(x) = \mathrm{e}^{-\mu x^2}$ のフーリエ変換は $\hat{f}(k) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\mu}}\mathrm{e}^{\frac{-k^2}{4\mu}}$ であるので μ が大きく鋭利な関数 f のフーリエ変換は幅広で小振幅，一方 μ が小さく幅広な関数 f のフーリエ変換は鋭利で大振幅である．このことより中立安定曲線 $\lambda = 0$ すなわち $a = -\hat{w}$ は $k_0 \neq 0$ で最小点をもつことがわかる．(2.1) は神経細胞集団の興奮パターンの単純なモデルとして使われる（[11] 参照）．

2.3 チューリング不安定性

反応拡散系で空間的に非一様な定常解が発生する理由を考えよう．すでにみたように 1 種の反応拡散方程式

$$u_t = D_1 u_{xx} + pu$$

において空間的に非自明なモードへの不安定化は観測できる形では生じない．そこでもうひとつ別の種 $w(t,x)$ を考えて種 w は種 u へ負のフィードバックを与え，逆に種 u は種 w へ正のフィードバックを与えるとする．また w 自身はそのままでは減衰するのみ，さらに w の時間発展は，u の時間発展と時間スケールが異なり，非常に速く変化するとしよう．すなわち方程式では

$$\left\{ \begin{aligned} u_t &= D_1 u_{xx} + pu - sw \\ \tau w_t &= D_2 w_{xx} + u - w \end{aligned} \right.$$

と表される．w の反応時定数 τ はとても小さく以下極端に $\tau=0$ として安定性を計算してみよう．[1] そのために $(u,w)=(\tilde{u},\tilde{w})\mathrm{e}^{\lambda t+ikx}$ を線形部分に代入し

$$\begin{cases} \lambda\tilde{u} &= (p-D_1k^2)\tilde{u}-s\tilde{w} \\ 0 &= (-1-D_2k^2)\tilde{w}+\tilde{u} \end{cases}$$

第２式より，$\tilde{w}$ が $\tilde{w}=\dfrac{\tilde{u}}{1+D_2k^2}$ と表せるので，まとめると

$$\lambda\tilde{u}=\left(p-D_1k^2-\frac{s}{1+D_2k^2}\right)\tilde{u}$$

で，従って安定性の臨界は

$$p=D_1k^2+\frac{s}{1+D_2k^2}$$

で与えられる．相加相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned} p &= \frac{D_1}{D_2}(1+D_2k^2)+\frac{s}{1+D_2k^2}-\frac{D_1}{D_2} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{D_1s}{D_2}}-\frac{D_1}{D_2} \end{aligned}$$

等号は $(1+D_2k^2)^2=\dfrac{D_2s}{D_1}$ のとき成立するので，$k=k_0>0$ で最小値を達成する必要十分条件は

$$\frac{D_2s}{D_1}>1$$

である．したがって，s,D_1,D_2 がこの条件をみたすようにとれば，臨界安定曲線が所望の形をとることになる．

なお，上の議論では $(1-D_2\partial_x^2)w=u$ を w に関してフーリエ空間で解いた．ここで $\dfrac{1}{1+D_2k^2}$ の逆フーリエ変換が $\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sqrt{D_2}}}$ であることを考慮すれば

$$w=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|}{\sqrt{D_2}}}u(y)dy$$

と実空間の表現に戻すことができる．すなわち２種の反応拡散系を

$$u_t=D_1u_{xx}+pu-\frac{s}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|}{\sqrt{D_2}}}u(y)dy$$

に帰着して安定性を調べたことになる．常微分方程式系で安定な平衡点が拡散係数の違いで不安定化することを一般にチューリング不安定化と呼ぶ．ここでは拡散係数の違いが非局所的な負のフィードバック効果を生み，非零波数モードの不安定化が理解できることを説明した．

[1] 真の固有値二つのうち一つは負でかつ $O(\tau^{-1})$ である．従ってこれは安定性の変化に寄与しない．もうひとつが以下で議論する λ で近似されることがわかる．

2.4 振動パターンの発生とウェーブ不安定性

線型化問題が不安定化するというとき，今までは正の固有値が一つ現れる場合を扱ってきた．したがって臨界になるのは固有値に $\lambda = 0$ を持つ場合で，この条件から中立安定曲線を描いた．これに対して，複素共役な固有値のペアが同時に虚軸を横切るという場合もある．このとき一般には時間周期解が発生し，ホップ分岐と呼ばれる．

ホップ分岐を起こす次の 2 次元常微分方程式系を考えよう．

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -p \\ q & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(2) \\ O(2) \end{pmatrix}$$

ここで，$q > 1$ は定数で，p はパラメーターとする．線型化行列 $M = \begin{pmatrix} p & -p \\ q & -1 \end{pmatrix}$ の固有多項式は $\lambda^2 - (\mathrm{trace}M)\lambda + \mathrm{det}M$ なので，$p = 1$ のとき $\mathrm{trace}M = 0$ かつ $\mathrm{det}M = p(q-1) > 0$ となり純虚数固有値を持つ．

さて，この 2 種の常微分方程式系に空間的な拡散効果を加えて反応拡散系：

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 u_{xx} \\ D_2 v_{xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & -p \\ q & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(2) \\ O(2) \end{pmatrix}$$

を考えよう．$(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})\mathrm{e}^{\lambda t + ikx}$ を方程式の線型部に代入し，波数 k の線型化安定性を調べる．

$$\lambda \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - D_1 k^2 & -p \\ q & -1 - D_2 k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$$

波数 k の線型安定性は行列 $M_k = \begin{pmatrix} p - D_1 k^2 & -p \\ q & -1 - D_2 k^2 \end{pmatrix}$ で決定されるが，とりわけ純虚数固有値をもつには $\mathrm{trace}M_k = 0$ が必要である．よって $p = 1 + (D_1 + D_2)k^2$ が必要条件である．すなわちホップ分岐の中立安定曲線は $k = 0$ に頂点をもつ．そこで，前節の考察と同様にして第 3 の種 w を導入し結果として非局所的なフィードバックを加えてみよう．以下のように拡張した反応拡散系を考える．

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \tau w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 u_{xx} \\ D_2 v_{xx} \\ D_3 w_{xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & -p & -s \\ q & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(2) \\ O(2) \\ O(2) \end{pmatrix}$$

$(u, v, w) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})\mathrm{e}^{\lambda t + ikx}$ を方程式の線型部に代入すれば $\tilde{w} = \dfrac{s}{1 + D_3 k^2}\tilde{u}$ と解けて $A_k = \begin{pmatrix} p - D_1 k^2 - \dfrac{s}{1 + D_3 k^2} & -p \\ q & -1 - D_2 k^2 \end{pmatrix}$ を得る．したがってホップ的な不安

定化の必要条件は

$$\mathrm{trace}A_k = p - 1 - (D_1 + D_2)k^2 - \frac{s}{1 + D_3k^2} = o$$

よって

$$\begin{aligned} p &= 1 + (D_1 + D_2)k^2 + \frac{s}{1 + D_3k^2} \\ &= \frac{D_1 + D_2}{D_3}(1 + D^3k^2) + \frac{s}{1 + D_3k^2} + 1 - \frac{D_1 + D_2}{D_3} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{(D_1 + D_2)s}{D_3}} + 1 - \frac{D_1 + D_2}{D_3} \end{aligned}$$

等号は，$(1 + D^3k^2)^2 = \dfrac{sD_3}{D_1 + D_2}$ のときに成り立つので

$$\frac{sD_3}{D_1 + D_2} > 1$$

が，非零波数が先にホップ的に不安定化する必要条件で，これを常微分的なホップ不安定化と区別して，ウェーブ不安定化と呼ぶ．なお，ウェーブ不安定化は s, D_3 および $D_1 + D_2$ によるので $D_1 + D_2$ を一定にしたままで D_1, D_2 の比を変えるとウェーブ不安定化とチューリング不安定化を同じ p の値で起こすことも可能である．このような状況をウェーブ・チューリング不安定化と呼び，２種類の不安定モードの競合がパターンを形作ることになる．

3　周期軌道の分岐解析

ホップ分岐，すなわち周期軌道の分岐をもっとも単純な設定で復習しておく（[10] に従う）ことはこれからの分岐解析計算に示唆的であろう．$\boldsymbol{u} = (x, y)$ に関する２次元常微分方程式系：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y; \alpha) \\ \dot{y} &= f_2(x, y; \alpha) \end{aligned} \tag{3.1}$$

がパラメーター $\alpha = 0$ で $(x, y) = \boldsymbol{0}$ を平衡点に持つとしよう．ただし f_1, f_2 は x, y, α に関して滑らかであるとする．(3.1) をまとめて $\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}; \alpha)$ とも表すことにする．さらに $(\boldsymbol{u}, \alpha) = (\boldsymbol{0}, 0)$ での方程式の線型化すなわちヤコビ行列 $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}, 0)$ が共役な純虚数のペア $\pm i\omega_0 \neq 0$ を固有値に持つとしよう．これだけの設定で通有的（generic）には (3.1) が周期軌道の分岐を起こすことを以下のように示すことができる．いくつかのステップに分けて説明しよう．

3.1 前処理

手始めに行うことは，平衡点がパラメーター α によらずに少なくとも局所的には $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ と一定であるように平行移動することである．これが可能であるためには，平衡点がパラメーター α に滑らか依存して $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\alpha)$ となっていればよい．実際，ヤコビ行列 $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0},0)$ が $\pm i\omega_0$ を固有値に持つと仮定したので $\det D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0},0)\neq 0$ であり，従って陰関数定理より $\alpha=0$ の近傍では $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\alpha)$ が存在し，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(\alpha);\alpha)=0$ であることがわかる．

次に各 α で線型化行列が標準的な形になるように線型変換を行う．仮定より $D\mathbf{f}(\mathbf{0},\alpha)$ の固有値は $\lambda(\alpha)=\mu(\alpha)+i\omega(\alpha)$ で $\mu(0)=0,\omega(0)=\omega_0$ である．ここで通有的には $\mu'(0)\neq 0$ として差し支えないので，適当にパラメーターを変換してそれを改めて同じ α で表すと，$\lambda(\alpha)=\alpha+i\omega(\alpha)$ としてよい．よって $\mathbf{u}$ に適当な線型変換を行うと，

$$D\mathbf{f}(\mathbf{0},\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha & -\omega(\alpha)\\ \omega(\alpha) & \alpha\end{pmatrix}$$

という形の実標準形にすることができる．すなわち上記の操作により方程式 (3.1) は

$$\begin{aligned}\dot{x}=&\ \ \alpha x-\omega y+(\text{h.o.t.})\\ \dot{y}=&\ \ \omega x+\alpha y+(\text{h.o.t.})\end{aligned}\tag{3.2}$$

と変換された．これは方程式の 1 次までの項を回転対称なものに直した，逆に言うと，固有値の仮定から回転対称にできたということを意味する．

さて，上の 2 次元系を複素変数の方程式とみると計算の見通しがよくなる．新たな変数 $z\in\mathbb{C}$ を $z=x+iy$ したがって $\overline{z}=x-iy$ とおく．すると，(3.2) は

$$\dot{z}=\lambda z+g(z,\overline{z},\alpha)\tag{3.3}$$

と表せる．ここで $g(z,\overline{z},\alpha)$ は (3.2) の高次項に $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2},y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ を代入して得られたものであるので，$z,\overline{z}$ に関して 2 次以上の項で一般に

$$g(z,\overline{z},\alpha)=\sum_{k+l\geq 2}\frac{g_{kl}(\alpha)}{k!l!}z^k\overline{z}^l\tag{3.4}$$

とおこう．

3.2 2 次項の消去

前節で変形した最後の方程式 (3.3) は一般に 2 次の非線型項を含むが，$\pm i\omega$ を固有値に持つ特異点のまわりではうまく変数変換すると消去できることがわかる．本質的に平衡点のまわりを回転するダイナミクスなので，回転で不変でないような項は削ぎ落としていくことができるのである．

補題 3.1 $\lambda = \alpha + i\omega(\alpha)$ で $\omega(0) \neq 0$ とする．複素変数 z に関する微分方程式：

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z\overline{z} + \frac{g_{02}}{2} \overline{z}^2 + O(|z|^3) \tag{3.5}$$

は適当な近恒等変換：

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w\overline{w} + \frac{h_{02}}{2} \overline{w}^2 \tag{3.6}$$

により

$$\dot{w} = \lambda w + O(|z|^3) \tag{3.7}$$

と $(z, \alpha) = (0, 0)$ の近傍で同等であるようにできる．

証明は直接計算なので省く．

3.3 3 次項の消去と標準形

補題 3.2 $\lambda = \alpha + i\omega(\alpha)$ で $\omega(0) \neq 0$ とする．複素変数 z に関する微分方程式：

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2\overline{z} + \frac{g_{12}}{2} z\overline{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \overline{z}^3 + O(|z|^4) \tag{3.8}$$

は適当な近恒等変換：

$$z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2\overline{w} + \frac{h_{12}}{2} w\overline{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \overline{w}^3 \tag{3.9}$$

により

$$\dot{w} = \lambda w + \frac{g_{21}}{2} w^2\overline{w} + O(|z|^4) \tag{3.10}$$

と $(z, \alpha) = (0, 0)$ の近傍で同等であるようにできる．

これも証明は直接計算であるが，消去できずに残ってしまう $z^2\overline{z}$ の項は共鳴項と呼ばれる．

3.4 実際の標準形計算

前節の結果から $\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2\overline{w}$ という方程式に帰着されることがわかったが，問題はこの c_1 の値（実部の正負）が知りたいのである．c_1 をいかにして計算するのか，気をつけないと誤りやすい．

というのは，補題 3.2 で一見 $g_{21}/2$ と求まっているように見えるからだ．しかし上の補題 3.2 の g_{21} は 2 次項消去の過程ですでに元々の g_{21} から変化していることに注意しよう．これを求めるためには単に補題 3.1 を証明するよりかなり複雑な計算を

要する．簡単な計算では済まないはずなのだ．補題 3.1 の逆変換を 3 次まで求めないといけないことになるからである．ところが，その手間をかけなくてもよい方法がある．それは，次のように二通りの方法で $\dot{z}$ を w の 3 次までの式として厳密に求め係数比較するという方法である．

まず (3.3) の右辺に，exact な変換式 (3.6) を代入する．これにより $\dot{z}$ が w で少なくとも 3 次項までは厳密に表すことができる．

次に (3.6) の両辺を微分する．この右辺には $\dot{w}$ の項があるが，ここに目標とする $\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \overline{w} + O(|z|^4)$ を代入すると，やはり $\dot{z}$ が w で少なくとも 3 次項までは厳密に表すことができる．

上の二つの式の係数比較により

$$c_1 = \frac{g_{20} g_{11}(2\lambda + \overline{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \overline{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}$$

が得られる．実際には臨界のとき，つまり $\lambda = i\omega_0$ のときの c_1 の実部がホップ標準形の符号を決定する．

このような計算ができるのは，すでに我々が補題 3.1, 3.2 を証明しているからでもちろん補題のステップを省略するわけにはいかないことを改めて注意しておく．

4 時空間的振動パターン

ウェーブ不安定化によって生じた非零波数の振動モードの分岐解析を行う．２章で登場した 3 種の反応拡散方程式系

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \tau w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 u_{xx} \\ D_2 v_{xx} \\ D_3 w_{xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & -p & -s \\ q & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

を考えよう．ただし f, g は u, v に関して 2 次以上の非線型項とする．時定数 $\tau = 0$ とすると $(1 - D_3\Delta)w = u$ がフーリエ空間では $\hat{w} = \dfrac{1}{1 + D_3 k^2}\hat{u}$ のように w について解けたのであった．これを実空間にもどすと，$w = \mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{1 + D_3 k^2}\right] * u$ であり，$\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{1 + D_3 k^2}\right] = \mathrm{e}^{-\frac{|s|}{\sqrt{D_3}}}$ を $\psi(s)$ とおけば $w = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(s)\psi(s - x)ds$ したがって (4.1) は次の 2 種系に帰着されることになる．

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t &=& D_1 u_{xx} + pu - pv + f(u,v) - s\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(s)\psi(s - x)ds \\ v_t &=& D_2 v_{xx} + qu - v + g(u,v) \end{array} \right. \tag{4.2}$$

ここでは簡単のために (4.2) の分岐解析を行い，時間周期的な振動パターンのダイナミクスを調べよう．すでに注意したように τ が小さければ (4.1) の波数 k に対応する三つの線型化固有値のうち二つは (4.2) のそれで近似され，残りのひとつは負で絶対値が $O(\tau^{-1})$ である．したがって中心多様体理論から (4.1) のダイナミクスは (4.2) のそれで近似されることがわかる．

4.1 振動パターン分岐の問題設定

さて (4.2) を有限区間で周期境界条件を課して考えることにする．すなわち未知関数 u, v が空間周期 L を持つとしよう：

$$u(t, x+L) = u(t,x) \quad , \quad v(t,x+L) = v(t,x)$$

このとき u, v を

$$u(t,x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_m(t)\mathrm{e}^{imk_0 x} \ , \ \ v(t,x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \beta_m(t)\mathrm{e}^{imk_0 x}$$

と基本波数 $k_0 = \dfrac{2\pi}{L}$ でフーリエ展開しよう．u, v は実数値であるのでフーリエ係数はエルミート対称性：$\alpha_m = \overline{\alpha_{-m}}, \beta_m = \overline{\beta_{-m}}$ をもつ．これを (4.2) に代入して m モードの式を書くと

$$\begin{array}{rllll}
\dot{\alpha_m} = & \left(p - D_1 m^2 k_0^2 - \dfrac{1}{1+D_3 m^2 k_0^2}\right)\alpha_m & & -p\beta_m & +[f(u,v)]_m \\
\dot{\beta_m} = & \alpha_m & & -\left(1+D_2 m^2 k_0^2\right)\beta_m & +[g(u,v)]_m
\end{array} \tag{4.3}$$

で， $m \in \mathbb{Z}$ であるから無限次元の常微分方程式系である．ここで，$[f(u,v)]_m$ などは非線型項をフーリエ展開した第 m モードの成分である．すなわち，$[f(u,v)]_m = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L f(u,v)\mathrm{e}^{-imk_0x}dx$ である．(4.3) の線型化行列は，A_{mk_0} であり，これがフーリエ展開の第 m モードの安定性を決定する．ただし

$$A_k = \begin{pmatrix} p - D_1k^2 - \dfrac{s}{1+D_3k^2} & -p \\ q & -1-D_2k^2 \end{pmatrix}$$

であり，波数 k に対して $\mathrm{trace} A_k = 0$ となる p の値が $p = \phi(k) := 1 + (D_1 + D_2)k^2 + \dfrac{s}{1+D_3k^2}$ と定まるが，2.4 節で調べたように $\dfrac{sD_3}{D_1+D_2} > 1$ であれば，$\phi(k)$ は $k = k^* \neq 0$ に極小点をもつ．さらに中立安定曲線上の点 $(k,p) = (k, \phi(k))$ での

$\det A_k$ の値は

$$
\begin{aligned}
\det A_k = & -\left(p - D_1k^2 - \frac{s}{1+D_3k^2}\right)(1+D_2k^2) + p \\
= & -(1+D_2k^2)^2 + 1 + (D_1+D_2)k^2 + \frac{s}{1+D_3k^2} \\
= & \; D_2k^2\left(\frac{D_1-D_2}{D_2^2} - k^2\right) + \frac{s}{1+D_3k^2}
\end{aligned}
$$

であるので，任意の $K>0$ に対して D_1+D_2 の値を保ちながら D_2 を十分小さくすれば中立安定曲線 $p=\phi(k)$ の $|k|<K$ の部分では固有値が純虚数であるようにできる．したがって実際にホップ的な不安定化が起きていることがわかる．

さて，$k=mk_0$ で $\mathrm{trace}A_{mk_0}=0$ なので，どんな非零整数 n に対してもうまく $k_0=\dfrac{2\pi}{L}$ をとれば p を大きくしてゆくと $\pm n$ モードが一番初めに不安定化し，しかもそれは純虚数固有値であるようにできる．一般には次のように考えればよい．$\pm m$ モードがホップ的に不安定化する中立安定曲線を

$$C_m = \{(k_0,p)|p=\phi(mk_0)\}$$

としよう．$k_0=0$ 以外で三つの異なる曲線 C_{m_1},C_{m_2},C_{m_3} が同時に交わることはないので，始めて不安定化する (k_0,p) の組には次の 4 通りがある．

(i) ある整数 $n\neq 0$ があり，$p=\phi(nk_0)$ であり $|m|\neq|n|$ のとき $p<\phi(mk_0)$

(ii) $p=\phi(0)$ であり，$|m|\neq 0$ のとき $p<\phi(mk_0)$

(iii) ある隣り合う整数 $n_1\neq 0, n_2\neq 0$ があり，$p=\phi(n_1k_0)=\phi(n_2k_0)$ で $|m|\neq|n_1|$ かつ $|m|\neq|n_2|$ のとき $p<\phi(mk_0)$

(iv) $p=\phi(0)=\phi(k_0)$

(i) は $\pm n$ モードの二つが臨界になっている場合に相当する．一方 (ii) は 0 モードのみ臨界で，(iii) は $\pm n_1$ と $\pm n_2$ モードが同時に臨界，また (iv) は $0,\pm 1$ の三つが同時に臨界という場合である．(ii) は空間一様な振動モードなので常微分方程式系のホップ分岐と本質的に同じである．以下 (i) の状況を仮定し標準形を求めよう．(i) の場合でも $\pm n$ の二つのモードが同時にホップ的に不安定化するので退化した状況である．

始めに，臨界モード $(\alpha_n,\beta_n),(\alpha_{-n},\beta_{-n})$ をそれぞれ複素化して表すことにする．そのために行列 A_{nk_0} を実標準形にする座標を使うと便利である．すなわち

$$TA_{nk_0}T^{-1} = \begin{pmatrix} \nu_n & -\omega_n \\ \omega_n & \nu_n \end{pmatrix}$$

なる行列 T により

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\pm n} \\ \tilde{\beta}_{\pm n} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha_{\pm n} \\ \beta_{\pm n} \end{pmatrix}$$

と座標変換を施す．ここで $\mu_n^{\pm} = \nu_n \pm i\omega_n$ は行列 A_{nk_0} の固有値で $\nu_n \approx 0, \omega_n \neq 0$ である．つまり (4.3) の中で $m = \pm n$ 番目の $(\alpha_{\pm n}, \beta_{\pm n})$ に関する方程式のみ座標を取り替えて

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\pm n} \\ \tilde{\beta}_{\pm n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_n & -\omega_n \\ \omega_n & \nu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\pm n} \\ \tilde{\beta}_{\pm n} \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} [f(u,v)]_{\pm n} \\ g(u,v)_{\pm n} \end{pmatrix}$$

と書いたことになる．そこで $z_{\pm 1} = \tilde{\alpha}_{\pm n} + i\tilde{\beta}_{\pm n}$ とおこう．エルミート対称性に注意すれば，

$$\tilde{\alpha}_{\pm n} = \frac{z_{\pm 1} + \overline{z_{\mp 1}}}{2}, \quad \tilde{\beta}_{\pm n} = \frac{z_{\pm 1} - \overline{z_{\mp 1}}}{2i},$$

であり[2]，この座標を用いて中心多様体上の方程式を求める．この座標を用いて方程式を書き直すと以下のようになる．

$$\dot{z_1} = \mu_n z_1 + Q(z_1, z_{-1}, \overline{z_1}, \overline{z_{-1}}, \alpha, \beta) + C(z_1, z_{-1}, \overline{z_1}, \overline{z_{-1}}, \alpha, \beta) + O(4)$$

$$\dot{z_{-1}} = \mu_n z_{-1} + Q(z_{-1}, z_1, \overline{z_{-1}}, \overline{z_1}, \alpha, \beta) + C(z_1, z_{-1}, \overline{z_1}, \overline{z_{-1}}, \alpha, \beta) + O(4)$$

ここで，Q, C はそれぞれ同じ 2 次，3 次多項式であり，(α, β) は正確には $\{(\alpha_m, \beta_m);\ |m| \neq 1\}$ のことである．

4.2 SO(2) 対称な退化型ホップ分岐の標準形

以上の設定で以下のことがわかる．

定理 4.1 ある非零整数 n に対して (4.3) の m モードの線型化行列 A_{mk_0} が $m = \pm n$ のときのみ純虚数固有値 $\pm i\omega_n$ をもち，それ以外の m のときはすべて実部が負の固有値をもつとする．このとき (4.3) の中心多様体のダイナミクスは 2 個の複素定数 g_{11}, g_{12} を用いて $|\mathrm{Re}\mu_n|$ が十分小さいときには次の複素 2 次元の常微分方程式系で表される．

$$\left\{ \begin{array}{llll} \dot{z_1} & = \mu_n z_1 & - \quad z_1(g_{11}|z_1|^2 + g_{12}|z_{-1}|^2) & + O(||(z_1, \overline{z_1}, z_{-1}, \overline{z_{-1}})||^4) \\ \dot{z_{-1}} & = \mu_n z_{-1} & - \quad z_{-1}(g_{12}|z_1|^2 + g_{11}|z_{-1}|^2) & + O(||(z_1, \overline{z_1}, z_{-1}, \overline{z_{-1}})||^4) \end{array} \right. \tag{4.4}$$

[2]符号は複合同順とする．添字の符号の反転に注意されたし．

注意 4.2 もし，(u,v) が偶関数のとき（ノイマン境界条件のときはこれにあたる）定理の (4.4) 式は次の複素１次元の常微分方程式系に帰着される．

$$\dot{z_1} = \mu_1 z_1 - (g_{11}+g_{12})z_1|z_1|^2 + O(||(z_1,\overline{z_1})||^4)$$

したがってノイマン境界条件のときは単なるホップ分岐である．

注意 4.3 (4.4) の３次までの式は構造安定なダイナミクスを与えないので，実際には５次までの標準形を求めることが必要である．しかしながら，(4.4) の極座標をとり振幅方程式を導くとこれは３次までで構造安定である．かくして $\pm n$ モードの競合を調べるという観点では３次までの標準形でも十分といえよう．

注意 4.4 定理4.1は通常の退化ホップ分岐の標準形定理とは若干異なることに注意しよう．なぜなら通常は二つのホップ臨界モードの固有値 $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ に対して ω_1, ω_2 が簡単な整数比にならないという非共鳴条件を課すが，ここでは $\omega_1 = \omega_2$ である．したがって標準形変換で本来消去すべき項が残ってしまう．そのかわりにここでは，共鳴してしまう項が実はSO(2) 対称性で，もとから存在しないという事実を用いる．

4.3　退化ホップ分岐解析

第 $\pm n$-モードのみが臨界であるという仮定の下で，退化特異点まわりの分岐解析を行い，定理 4.1 における g_{11}, g_{12} を求めるのがこの節での目標である．4.1 節で求めた臨界モードの方程式：

$$\dot{z_1} = \mu_n z_1 + Q(z_1, z_{-1}, \overline{z_1}, \overline{z_{-1}}, \alpha, \beta) + C(z_1, z_{-1}, \overline{z_1}, \overline{z_{-1}}, \alpha, \beta) + O(4)$$

$$\dot{z_{-1}} = \mu_n z_{-1} + Q(z_{-1}, z_1, \overline{z_{-1}}, \overline{z_1}, \alpha, \beta) + C(z_1, z_{-1}, \overline{z_1}, \overline{z_{-1}}, \alpha, \beta) + O(4)$$

を用いて中心多様体上の方程式を導こう．そのためには一般には隷属変数を臨界変数で解く必要があるが，ここでは標準形変換の方法を用いる．

まず中心多様体は臨界モードの固有空間に接しているので，臨界モードが $|z_{\pm 1}| = O(\delta)$ である限り，隷属モードの大きさは高々$|\alpha_m| = O(\delta^2)$ である．従って上の式の $O(\delta^3)$ までの項を拾うと次の式が得られる．

$$\begin{aligned} z_1 = \mu_n z_1 \quad &+ \quad F_{00}z_1\alpha_0 + F_{01}z_1\beta_0 + F_{10}\overline{z_{-1}}\alpha_0 + F_{11}\overline{z_{-1}}\beta_0 \\ &+ \quad G_{00}z_{-1}\alpha_2 + G_{01}z_{-1}\beta_2 + G_{10}\overline{z_1}\alpha_2 + G_{11}\overline{z_1}\beta_2 \\ &+ \quad H_{11}z_1|z_1|^2 + H_{12}z_1|z_{-1}|^2 + (other\ cubic\ terms) + O(\delta^4) \end{aligned}$$

ここで $F_{00}, F_{01}, F_{10}, F_{11}, G_{00}, G_{01}, G_{10}, G_{11}, H_{11}, H_{12}$ はもちろん方程式から決まる定数である．（Appendix 参照．実際に F, G を計算すれば対称性：$F_{00} = G_{00}, F_{01} = G_{01}, F_{10} = G_{10}, F_{11} = G_{11}$ が成立することもわかる．）これらはもともと $\displaystyle\sum_{m_1+m_2=1} \alpha_{m_1}\alpha_{m_2}$

や $\displaystyle\sum_{m_1+m_2+m_3=1} \alpha_{m_1}\alpha_{m_2}\alpha_{m_3}$ から現れる項だが，例えば上式の項以外の 2 次の項はすべて $O(\delta^4)$ の項となるので，無視してよい．一方，隷属モードの中でも 0, 2-モードは 2 次の項を通して $O(\delta^3)$ の影響を与えうるのでこれらを有効モードと呼ぶことにする．有効モードが 2 次の項を通してどのような影響を及ぼすかは 0, 2-モードの方程式を $O(\delta^2)$ まで見てやればよい．それらを次のように表す．

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha_0} \\ \dot{\beta_0} \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D^1_{00} z_1 z_{-1} + D^1_{01} z_1 \overline{z_1} + D^1_{10} \overline{z_{-1}} z_{-1} + D^1_{11} \overline{z_{-1} z_1} \\ D^2_{00} z_1 z_{-1} + D^2_{01} z_1 \overline{z_1} + D^2_{10} \overline{z_{-1}} z_{-1} + D^2_{11} \overline{z_{-1} z_1} \end{pmatrix} + O(\delta^3)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha_2} \\ \dot{\beta_2} \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E^1_0 z_1^2 + E^1_1 z_1 \overline{z_{-1}} + E^1_2 \overline{z_{-1}}^2 \\ E^2_0 z_1^2 + E^2_1 z_1 \overline{z_{-1}} + E^2_2 \overline{z_{-1}}^2 \end{pmatrix} + O(\delta^3)$$

さてこれらを用いて中心多様体上のダイナミクスを得るには，次のような 2 次の近恒等変換を行ってすべての 2 次の項を消去すればよい．

$$\begin{aligned} w_1 = z_1 \quad &+ \quad S_{00} z_1 \alpha_0 + S_{01} z_1 \beta_0 + S_{10} \overline{z_{-1}} \alpha_0 + S_{11} \overline{z_{-1}} \beta_0 \\ &+ \quad T_{00} z_{-1} \alpha_2 + T_{01} z_{-1} \beta_2 + T_{10} \overline{z_1} \alpha_2 + T_{11} \overline{z_1} \beta_2 \end{aligned}$$

ここで $S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11}, T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}$ は 2 次の項を消去するように後に定める未知係数である．この新しい座標を用いて z_1 の方程式を書き換えると

$$\begin{aligned} \dot{w_1} = \mu_n w_1 \quad &+ \quad \tilde{F}_{00} z_1 \alpha_0 + \tilde{F}_{01} z_1 \beta_0 + \tilde{F}_{10} \overline{z_{-1}} \alpha_0 + \tilde{F}_{11} \overline{z_{-1}} \beta_0 \\ &+ \quad \tilde{G}_{00} z_{-1} \alpha_2 + \tilde{G}_{01} z_{-1} \beta_2 + \tilde{G}_{10} \overline{z_1} \alpha_2 + \tilde{G}_{11} \overline{z_1} \beta_2 + O(\delta^3) \end{aligned}$$

ただし $\tilde{F}$ などは次のようになる．

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_{00} \\ \tilde{F}_{01} \end{pmatrix} = {}^t A_0 \begin{pmatrix} S_{00} \\ S_{01} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{00} \\ F_{01} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_{10} \\ \tilde{F}_{11} \end{pmatrix} = ({}^t A_0 + (\overline{\mu_n} - \mu_n) I) \begin{pmatrix} S_{10} \\ S_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{10} \\ F_{11} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{G}_{00} \\ \tilde{G}_{01} \end{pmatrix} = {}^t A_2 \begin{pmatrix} T_{00} \\ T_{01} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{00} \\ G_{01} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{G}_{10} \\ \tilde{G}_{11} \end{pmatrix} = ({}^t A_2 + (\overline{\mu_n} - \mu_n) I) \begin{pmatrix} T_{10} \\ T_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{10} \\ G_{11} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

ここで $\pm n$-モードが臨界であるとしていたことを思い出そう．$\mu_n = i\omega_n \neq 0$ なので，$\overline{\mu_n} - \mu_n = -2i\omega_n$ で従って上に現れた 4 つの行列はすべて正則である．よって，適当な標準形変換の未知係数をとれば 2 次項がすべて消去されることがわかる．そ

の結果さらに同様の3次の標準形変換を行うことにより $z_1|z_1|^2, z_1|z_{-1}|^2$ 以外のすべての3次の項も消去することができる．こうして中心多様体上の方程式は二つの臨界モード $z_{\pm1}$ を用いて次のように表せる．

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \mu_n z_1 - z_1(g_{11}|z_1|^2 + g_{12}|z_{-1}|^2) + O(4) \\ \dot{z}_{-1} &= \mu_n z_{-1} - z_{-1}(g_{12}|z_1|^2 + g_{11}|z_{-1}|^2) + O(4) \end{aligned} \tag{4.9}$$

実は，これは定理4.1を再確認したことに他ならない．

さて，実際に標準形の3次の係数 g_{11}, g_{12} を求めるには，3.4節に従い，再計算を行う．結果として以下が得られる：

$$\begin{aligned} -g_{11} &= H_{11} + S_{00}D_{01}^1 + S_{01}D_{01}^2 + T_{10}E_0^1 + T_{11}E_0^2 \\ -g_{12} &= H_{12} + S_{10}D_{00}^1 + S_{11}D_{00}^2 + T_{00}E_1^1 + T_{01}E_1^2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

ここで，(4.9)を振幅と偏角の式に分ければ3次項の係数が重要な意味を持つことが直ちにわかる．すなわち $\mathrm{Re}g_{11}, \mathrm{Re}g_{12}$ 共に正としたとき，$\mathrm{Re}g_{11} < \mathrm{Re}g_{12}$ ならば(4.9)で単一モードが安定で，逆に $\mathrm{Re}g_{11} > \mathrm{Re}g_{12}$ ならば(4.9)で複合モードが安定になる．前者がRWが安定な場合で，後者がSWが安定な場合である．$\mathrm{Re}g_{11}, \mathrm{Re}g_{12}$ が共に負の場合は3次のtruncated dynamicsでは分岐が亜臨界になり安定な解が得られないことを注意しておく．また $\mathrm{Re}g_{11}, \mathrm{Re}g_{12}$ が異符号の場合は $|\mathrm{Re}g_{11}| > |\mathrm{Re}g_{12}|$ のときのみ安定な複合波すなわちSWが存在することが簡単な考察でわかる．こうして，与えられた方程式ごとに ±1 モードの退化ホップ分岐の分岐解析をすることができて，RW, SWの安定性を定めることができる．まとめると以下のように書き表せる．

定理 4.5 定理4.1と同じ設定の下で，中心多様体上の方程式(4.4)の係数は(4.10)で与えられる g_{11}, g_{12} である．ただし $\{S_{jk}, T_{jk}; 0 \le j, k \le 1\}$ は $\tilde{F}_{jk} = \tilde{G}_{jk} = 0, 0 \le j, k \le 1$ となる(4.5),(4.6),(4.7),(4.8)の解とする．さらに $\mathrm{Re}g_{11} > 0$ かつ $\mathrm{Re}g_{12} > 0$ であればRW,SWに対応する不変トーラスが超臨界に分岐する．その際，$\mathrm{Re}g_{11} < \mathrm{Re}g_{12}$ であればRWに，$\mathrm{Re}g_{11} > \mathrm{Re}g_{12}$ ならばSWに対応する不変トーラスが安定である．また $\mathrm{Re}g_{11}, \mathrm{Re}g_{12}$ が異符号のときは $|\mathrm{Re}g_{11}| > |\mathrm{Re}g_{12}|$ のときのみ安定な不変トーラスが存在しそれはSWに対応する不変トーラスである．

ここで典型的な数値計算結果を紹介しておこう．非線形項を

$$\begin{aligned} f(u,v) &= p(u-v) + a_1u^2 + 2b_1uv + c_1v^2 - c_3u^3 \\ g(u,v) &= qu - v + a_2u^2 + 2b_2uv + c_2v^2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

とする．非線形項が3次項のみの時はRWしか現れないが，2次項をうまくコントロールするとSWが現れるようになる（図1）．このようなパラメーター探索も分岐解析の結果可能になったといえる．注意4.2からもわかるようにノイマン境界条件を課すと，当然のことながらRWが現れるパラメーター値でもSWが現れる（図2）．

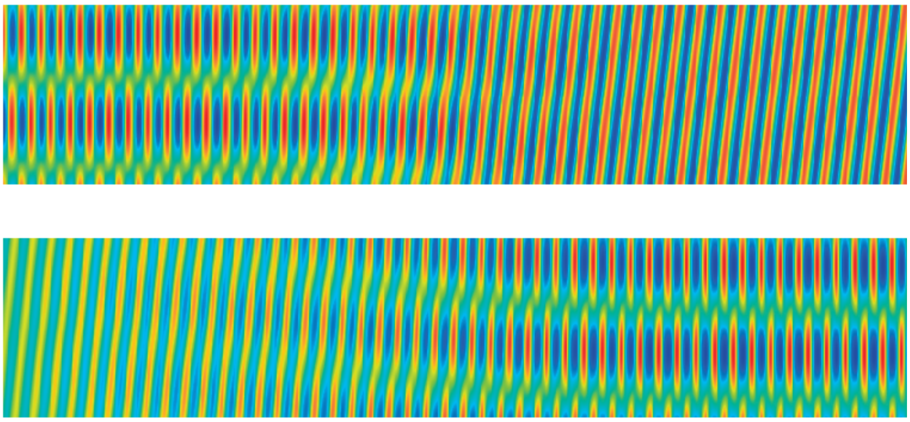


図 1: 方程式 (4.1) のシミュレーション結果．縦軸が空間方向，横軸が時間（右が正の向き）．境界条件は周期的．上下ともに $L = 2\pi, p = 2.01, q = 1.5, s = 2.0, D_1 = 0.8, D_2 = 0.2, a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$．さらに上では $a_2 = 1, b_2 = 0$ で，下では $a_2 = 0, b_2 = 1$ とした．上では SW の初期値からスタートし RW に収束，逆に下では RW の初期値からスタートし SW に収束している．なお，3 次の非線形項のみのときは上図と同様の結果になる．

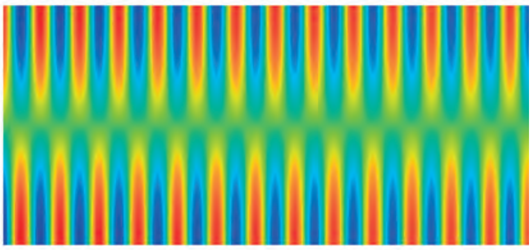


図 2: 方程式 (4.1) のノイマン境界条件でのシミュレーション結果．$L = \pi, p = 2.01, q = 1.5, s = 2.0, D_1 = 0.8, D_2 = 0.2, a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0, c_3 = 1$．なお，代わりに $a_2 = 1, c_3 = 0$ や $b_2 = 1, c_3 = 0$ としても上図と同様 SW が現れる．

5　その他の話題

前節では，ウェーブ不安定化が起きた際の最も単純なケースを扱った．これに対して，4.1 節の分類で (iii)(iv) の場合なども分岐解析は可能である（図 3 参照）．また，ウェーブ不安定化とチューリング不安定化が同時に起こる場合（図 4,5 参照）も，興味深い．講義では，そのいくつかを数値計算結果も含めて紹介する予定である．

6　Appendix

標準形の係数の計算に用いる定数を以下に記す．なお，以下に現れる t_{ij}, t'_{ij} は行列の成分：$T_1 = (t_{ij}), T_1^{-1} = (t'_{ij})$ を表すものとする．

$$
\begin{aligned}
F_{00} &= (a_1t_{11}+a_2t_{12})(t'_{11}-it'_{12})+(b_1t_{11}+b_2t_{12})(t'_{21}-it'_{22}) \\
&\quad +i\{(a_1t_{21}+a_2t_{22})(t'_{11}-it'_{12})+(b_1t_{21}+b_2t_{22})(t'_{21}-it'_{22})\}, \\
F_{01} &= (b_1t_{11}+b_2t_{12})(t'_{11}-it'_{12})+(c_1t_{11}+c_2t_{12})(t'_{21}-it'_{22}) \\
&\quad +i\{(b_1t_{21}+b_2t_{22})(t'_{11}-it'_{12})+(c_1t_{21}+c_2t_{22})(t'_{21}-it'_{22})\}, \\
F_{10} &= (a_1t_{11}+a_2t_{12})(t'_{11}+it'_{12})+(b_1t_{11}+b_2t_{12})(t'_{21}+it'_{22}) \\
&\quad +i\{(a_1t_{21}+a_2t_{22})(t'_{11}+it'_{12})+(b_1t_{21}+b_2t_{22})(t'_{21}+it'_{22})\}, \\
F_{11} &= (b_1t_{11}+b_2t_{12})(t'_{11}+it'_{12})+(c_1t_{11}+c_2t_{12})(t'_{21}+it'_{22}) \\
&\quad +i\{(b_1t_{21}+b_2t_{22})(t'_{11}+it'_{12})+(c_1t_{21}+c_2t_{22})(t'_{21}+it'_{22})\}, \\
G_{00} &= F_{00}, \\
G_{01} &= F_{01}, \\
G_{10} &= F_{10}, \\
G_{11} &= F_{11},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^1_{00} &= a_1(t'_{11}-it'_{12})^2/2+b_1(t'_{11}-it'_{12})(t'_{21}-it'_{22})+c_1(t'_{21}-it'_{22})^2/2, \\
D^1_{11} &= a_1(t'_{11}+it'_{12})^2/2+b_1(t'_{11}+it'_{12})(t'_{21}+it'_{22})+c_1(t'_{21}+it'_{22})^2/2, \\
D^1_{01} &= a_1({t'_{11}}^2+{t'_{12}}^2)/2+b_1(t'_{11}t'_{21}+t'_{12}t'_{22})+c_1({t'_{21}}^2+{t'_{22}}^2)/2, \\
D^1_{10} &= D^1_{01},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E^1_0 &= a_1(t'_{11}-it'_{12})^2/4+b_1(t'_{11}-it'_{12})(t'_{21}-it'_{22})/2+c_1(t'_{21}-it'_{22})^2/4, \\
E^1_2 &= a_1(t'_{11}+it'_{12})^2/4+b_1(t'_{11}+it'_{12})(t'_{21}+it'_{22})/2+c_1(t'_{21}+it'_{22})^2/4, \\
E^1_1 &= a_1({t'_{11}}^2+{t'_{12}}^2)/4+b_1(t'_{11}t'_{21}+t'_{12}t'_{22})/2+c_1({t'_{21}}^2+{t'_{22}}^2)/4,
\end{aligned}
$$

D^2_{lm}, E^2_l は D^1_{lm}, E^1_l のそれぞれ a_1, b_1, c_1 を a_2, b_2, c_2 に替えたものに等しい．

$$
\begin{aligned}
H_{11} &= -\frac{3}{8}(t_{11}+it_{21})(t'_{11}-it'_{12})({t'_{11}}^2+{t'_{12}}^2), \\
H_{12} &= -\frac{6}{8}(t_{11}+it_{21})(t'_{11}-it'_{12})({t'_{11}}^2+{t'_{12}}^2).
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] 西浦 廉政, 非線形問題 1 －パターン形成の数理, 岩波講座・現代数学の展開 5, 岩波書店 (1999).

[2] 水島二郎, 藤村薫, 流れの安定性, 朝倉書店 (2003).

[3] D.Armbruster, J.Guckenheimer and P.Holmes, *Kuramoto-Sivashinsky dynamics on the center-unstable manifold*, SIAM J. Appl. Math., 49(1989), pp.676-691.

[4] J.Carr, *Applications of center manifold theory*, Applied Mathematical Sciences 45, Springer, 1981.

[5] M.Cross and P.Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, Reviews of Modern Physics, 65(3), 1993.

[6] M.Golubitsky, I.Stewart and D.Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory (Vol.II)*, Applied Mathematical Sciences 69, Springer, 1988.

[7] S.A.Gourley and N.F.Britton, *A predator-prey reaction-diffusion system with nonlocal effects*, J.Math.Biol., 34, 297-333, 1996.

[8] D.Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture notes in mathematics 840, Springer, 1981.

[9] K.Krisher, N.Mazouz, G.Flatgen, *Pattern Formation in Globally Coupled Electrochemical Systems with an S-Shaped Current-Potential Curve*, J.Phys.Chem.B, 104, 7545-7553, 2000.

[10] Y.A.Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer Applied Mathematical Sciences 112, 1998.

[11] J.D.Murray, *Mathematical Biology II:Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer,1989.

[12] E.M.Nicola, M.Bar, Harald Engel, *Wave Instability Induced by Nonlocal Spatial Coupling in a Model of the Light-Sensitive Belousov-Zhabotinsky Reaction*, Phys.Rev. E, 73, 066225, 2006.

[13] Y.Nishiura, *Far-from-Equilibrium Dynamics*, translations of Mathematical Monographs 209, AMS, 2002.

[14] A.M.Turing, *The Chemical Basis of Morphogenesis*, Phil.Trans. Roy. Soc. London, Ser. B, 237(641), 37-72, 1952.

[15] A.Vanderbauwhede,G.Iooss, *Center Manifold Theory in Infinite Dimensions*, in Dynamics Reported, Springer, 1991.

[16] L.Yang, M.Dolnik, A.M.Zhabotinsky and I.E.Epstein, *Pattern Formation Arising from Interactions between Turing and Wave Instabilities*, J.Chem.Phys., 117(15), 7259-7265, 2002.

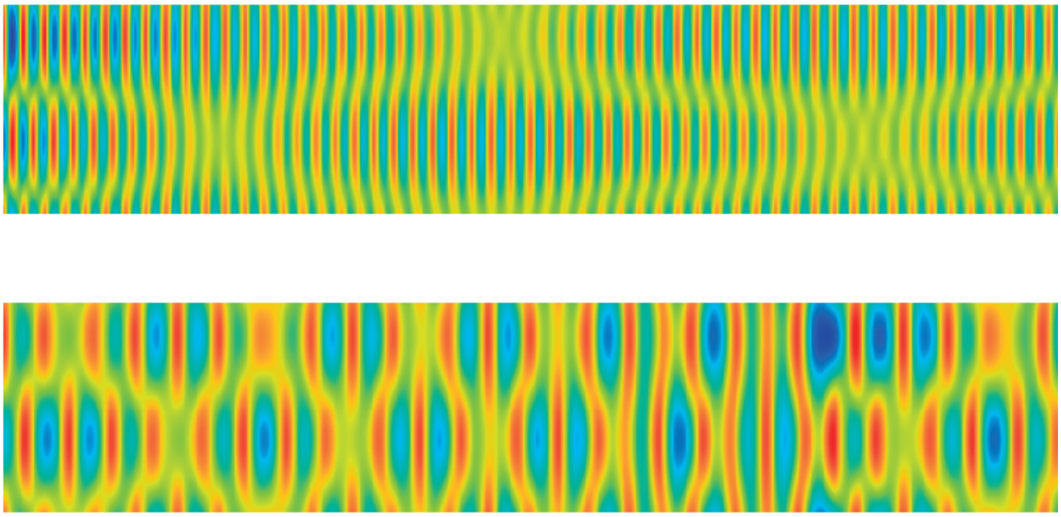


図 3: (iii) の場合の，$0, \pm 1$ の三つのモードの相互作用の結果現れるパターン．

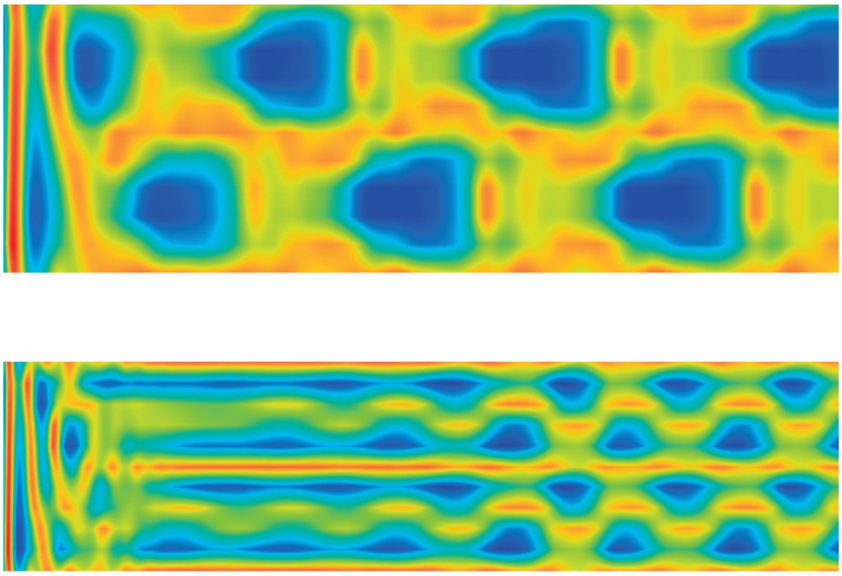


図 4: 3 種系でのウェーブ・チューリング不安定化（空間 1 次元）．

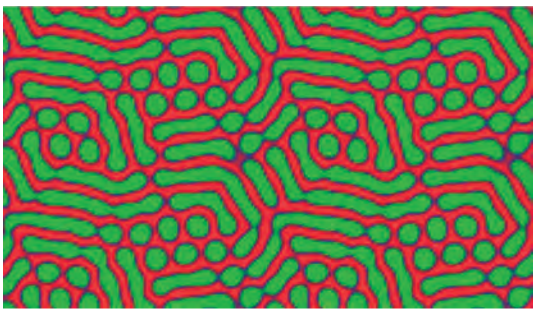


図 5: 3 種系でのウェーブ・チューリング不安定化（空間 2 次元）．

東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻

宮本　安人

プロフィール：東京大学大学院数理科学研究科にて学位（数理科学）取得後、北海道大学大学院工学研究科知識メディアラボラトリー中核的研究機関研究員、京都大学数理解析研究所 COE 研究員、日本学術振興会特別研究員 PD（受け入れ研究者：京都大学数理解析研究所　岡本久教授）を経て、現在、東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻（大域数学講座）助教。研究分野は非線形楕円型・放物型偏微分方程式（系）の解の定性的理論。具体的なキーワードは、パターン形成、分岐理論、グローバルアトラクター。関数解析を用いた一般的手法と個々の方程式の構造を利用した個別的手法のどちらにも興味を持っている。

冬の学校の感想：　出席者の方々はバックグラウンドも年齢も幅広く、数学的側面の強い数理現象が、物理学や化学をバックグラウンドに持つ方々からどのように見えるかといった感想を聞く、貴重な機会であり、有意義な研究会であったと思います。また、研究会自体は、滞りなく進行いたしました。組織委員の皆様には会場の手配とこの研究会の広報や運営で、大変なご苦労をおかけしたと思います。この場を借りて御礼申し上げます。

安定パターンの形状と非線形ホットスポット予想

宮本 安人† (東京工業大学　大学院理工学研究科　数学専攻)

平成２１年１２月１０日

概 要

２種の反応拡散系の shadow system や制限の付いた変分問題など，自然現象に現れるモデル方程式の定常解の安定性は，単独方程式の線形化固有値問題の第２固有値の符号と密接に関連している．とりわけ，凸領域の場合は安定解の形状を求める問題が「非線形ホットスポット予想」と呼ばれる問題に帰着できる．本稿では，これらの安定パターンの形状を求めるときに現れる固有値問題や，線形と非線形ホットスポット予想の位置づけ，既知の結果と未解決問題について概説する．

1　序

この節では，自然現象に現れるモデル方程式の安定定常解の形状について考える．考える問題は主に次の２つである： (i) 活性因子・抑制因子系の shadow system，(ii) 制限 (constraint) の付いた変分問題．そして安定定常解の形状を求める問題が，単独方程式の線形化固有値問題の第２固有値の符号を調べる問題に帰着できることを示す．

1.1　活性因子・抑制因子系の安定定常解

自然現象のモデル方程式（または系）に多く現れる Neumann 境界条件下の反応拡散方程式（系）の安定定常解の形状について考える．

Chafee [C75] は 1975 年に，１次元区間上の単独反応拡散方程式の非定数定常解は不安定となることを示した．Casten-Holland [CH78] は 1978 年に，俣野 [Ma79] は 1979 年に，独立に，一般次元の凸領域上の単独反応拡散方程式の非定数定常解は不安定となることを示した．これによって，凸領域上では，単独反応拡散方程式で記述されるモデルは，安定な非自明なパターンが存在しないことが明らかになった．

次の結果を紹介する前に，shadow system について説明する．二つの未知関数 $u(x,t), v(x,t)$ からなる領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ における次の反応拡散系を考える．

$$u_t = D_u\Delta u + f(u,v)\ \text{ in }\ \Omega,\qquad \tau v_t = D_v\Delta v + g(u,v)\ \text{ in }\ \Omega,\tag{FS}$$

$$\partial_\nu u = 0\ \text{ on }\ \partial\Omega,\qquad \partial_\nu v = 0\ \text{ on }\ \partial\Omega.$$

第 2 式の拡散係数を無限大，すなわち $D_v\to+\infty$ とすると，$v(x,t)$ は空間的に一様になると予想される．つまり，空間変数に依存せずに時間変数にのみ依存する関数 $\xi(t)$ を用いると，$v(x,t)\to$

† 〒 145-0062 東京都目黒区大岡山 2-12-1
Email: miyamoto@math.titech.ac.jp

	単独方程式	連立方程式
空間 1 次元	定数解のみ	定数解と単調関数のみ
空間 N 次元 ($N \geq 2$)	定数解のみ	?

表 1: 有界凸領域上，定常解が安定となるための定常解の形状に関する条件

$\xi(t)$ ($D_v \to +\infty$)．そこで，形式的に $v(x,t) = \xi(t)$ とし，第 2 式と定数関数 1 との L^2 内積をとることによって，すなわち Neumann 境界条件の下で両辺を積分することによって，下記の (SS) を得る．この操作は，定数関数 1 と直交する方向，すなわち（1 次元ならば）2 番目以降の高いモードの成分を全て消去することに対応する．

$$u_t = D\Delta u + f(u,\xi) \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \tau\xi_t = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g(u,\xi)dx, \tag{SS}$$

$$\partial_\nu u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega.$$

(SS) を西浦 [N82] に倣い shadow system と呼ぶことにする．(FS) の数学的な解析は一般的に困難であるが，この shadow system は，元の連立方程式 (FS) の性質を受け継ぎつつ $v(x,t)$ が空間的に一様な関数 $\xi(t)$ に置き換えられているので，第 1 式に関して一様媒質下の単独方程式の手法が使用でき，数学的な解析が比較的容易になる．(SS) と (FS) は，ダイナミクスについてもある意味で近いことが知られている [Mi06a].

本題に戻り，定常解の形状と安定性に関する次の結果を紹介する．西浦 [N94] は 1994 年に，1 次元有界区間上の活性因子・抑制因子系と呼ばれる反応拡散系の shadow system において，u が定数関数と単調関数以外となる定常解 (u,ξ) は，不安定であることを示した（この結果は，後に Ni-Poláčik-柳田 [NPY01] によって，より広いクラスの反応拡散系に対して成立することが示された）．従って非自明な安定定常解は，u が単調関数となるときのみである．表 1 は，これらの結果をまとめたものである．

多次元領域上の（単独ではない）反応拡散系における安定定常解とその形状の関係は，どのようになっているのだろうか？　例えばヒドラと呼ばれる体長 5 mm ほどの小さな生物の「頭」の形態形成に関するモデル方程式系である Gierer-Meinhardt 系 [GM72] の shadow system（下記の例 1）は，凸領域においても非自明安定定常解を持つことが知られている [NTY01, Mi05]．一方，反応拡散系が勾配系 [JM94] や歪勾配系 [Y02] などの特殊な構造を持つ場合は，多次元においても領域が凸ならば，「抑制因子の方程式の時定数と呼ばれる変数（(SS) における τ に相当）が，勾配系のときは 1，歪勾配系のときはある程度大きい」といった条件の下で，全ての非定数定常解が不安定であることが知られている．特に，Gierer-Meinhardt 系は歪勾配系の例であり，一見，矛盾した結果に思われる．しかし，上記の条件は，時定数 τ が小さい場合を含まず，その場合において，安定な非定数定常解が存在することが予想される．

時定数 τ の役割を説明するため，(FS) における u と v の意味を化学の言葉を用いて直感的に説明したい．活性因子・抑制因子系は，拡散が比較的遅い活性因子 u (short range activator) と拡散が比較的速い抑制因子 v (long range inhibitor) が相互に作用する現象を記述する系で，(SS) は，抑制因子の拡散の強さを無限大とし，瞬間的に抑制因子のみが空間的に一様となる極限をとった系である．活性因子は抑制因子の生産率を増加させるように作用し ($g_u > 0$)，抑制因子は活性因子の生産率を減少させるように作用する ($f_v < 0$)．抑制因子の生産率は，他に反応がなければ自然に減少する ($g_v < 0$)．活性因子は自分自身に対して自己触媒的に作用するような現象を想定しているため，f の u に対する単調性は仮定しない．この f の u に関する非単調性が，さまざまな興味深い

現象を呈する原因とみなせる．(FS) が

$$f_v < 0, \quad g_u > 0, \quad g_v < 0 \tag{AI}$$

を満たすとき，活性因子・抑制因子系 (activator-inhibitor system) と呼ぶことにする．以降，(AI) を満たす (SS) を考える．まず、(u,ξ) が定常解ならば、τ の値にかかわらず定常解となることに注意する．$\tau(>0)$ は，活性因子と抑制因子の反応速度の比を表し，τ が大きいときは，抑制因子の反応速度が遅いことに対応する．この場合，(SS) の第２式の両辺 τ で割り，$\tau \to +\infty$ とすると ξ が時間変化しないことがすぐにわかる．従って (SS) のダイナミクスは単独方程式のそれと近いことが予想されるので，凸領域においては，非自明解はすべて不安定となる ([CH78, Ma79] の結果と一致する)．一方 τ が小さいときは，抑制因子の反応速度が速いことに対応するので系を安定化すると考えられる．この場合は，非自明解が安定になる可能性がある．ところで，τ が小さいときに安定となる定常解が，τ が大きくなると不安定となるような状況が考えられるが，この場合は通常 Hopf 分岐する．[NTY01, WW03] において Gierer-Meinhart 系の場合の複素固有値が虚軸を横切る様子の詳しい解析がなされている．この時定数による安定性の変化は，単独方程式では現れず，連立方程式に特有の現象であるので，活性因子・抑制因子系に限らず連立方程式においては，どのような時定数の範囲で安定になるかは，重要な視点であると思われる．

上記の化学現象に基づいた直観的な系のダイナミクスの解釈から，次の問題が提起される．(i) 時定数 τ が小さい場合を含み，(ii) 多次元領域上の，(iii) 特定の系ではなく広いクラスの（単独ではない）反応拡散系に対し，「安定ならば，どのような形か？」すなわち，安定となるための解の形状に関する必要条件を求めたい．具体的には（大きい τ だけではなく）全ての $\tau > 0$ について，解の形状から判定できる不安定となるための十分条件を求める．すると対偶は，ある $\tau > 0$ について，解の形状から判定できる安定となるための必要条件となる．

ここでは，次の条件を満たす shadow system (SS) を考える:

$$f_\xi < 0, \quad g_\xi < 0, \quad \text{ある関数 } k(\xi) \text{ が存在し，} g_u(u,\xi) = -k(\xi) f_\xi(u,\xi) \tag{N}$$

条件 (N) の初めの二つの条件に関しては (AI) に含まれる条件であるので自然である．最後の条件は人工的な印象を受けるが，下記の２つの例を含む．

例１ Gierer-Meinhardt 系の shadow system

$$u_t = \varepsilon^2 \Delta u - u + \frac{u^p}{\xi^q} \ \text{ in } \ \Omega, \qquad \tau \xi_t = -\xi + \frac{1}{|\Omega| \xi^s} \int_\Omega u^r dx,$$
$$\partial_\nu u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega,$$
$$p > 1, \ q > 0, \ r > 0, \ s \geq 0, \ 0 < \frac{p-1}{q} < \frac{r}{s+1}, \ p < \begin{cases} \infty & \text{if } N = 1, 2; \\ \dfrac{N+2}{N-2} & \text{if } N \geq 3, \end{cases}$$

は，常に (AI) を満たす．また，$p = r - 1$ ならば，(N) を満たす．

例２ FitzHugh-Nagumo 型の非線形項を持つ反応拡散系の shadow system

$$u_t = D_u \Delta u + u(u-a)(1-u) - \gamma \xi \ \text{ in } \ \Omega, \qquad \tau \xi_t = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx - \kappa \xi,$$
$$\partial_\nu u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega,$$
$$0 < a < 1, \ \gamma > 0, \ \kappa > 0,$$

は，常に (AI) と (N) を満たす．

まず，一般次元空間内の任意領域で成り立つ，(SS) の定常解が不安定となるための（抽象的な）十分条件を与える．

補題 1 [Mi06b, Lemma 3.2]

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を区分的になめらかな境界を持つ有界領域とする．(u, ξ) は (N) を満たす (SS) の定常解とする．第 1 式を u のみの方程式とみた線形化固有値問題

$$D\Delta\varphi + f_u(u, \xi)\varphi = \lambda\varphi \ \text{ in } \ \Omega, \qquad \partial_\nu\varphi = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \tag{1}$$

の第 2 固有値が正ならば，任意の $\tau > 0$ に関して，(u, ξ) は不安定．すなわち，(SS) の線形化固有値問題は，実部が正の固有値を持つ．

ξ が定数であることから，第 1 式は u に関して一様媒質下の単独方程式と見なせることに注意する．この補題から，(SS) の定常解 (u, ξ) が安定となるためには，（第 1 式を u のみの方程式と見た）単独方程式の第 2 固有値が負でなければならない．

1.2 制限の付いた変分問題の極小点

次の制限（constraint）の付いた汎関数の極小化問題を考える：

$$E(u) = \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon^2 |\nabla u|^2}{2} + F(u) \right) dx \quad \text{subject to} \quad m = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx \tag{2}$$

ここで，$F(u)$ は，

$$F(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2 \tag{3}$$

のような 2 重井戸型ポテンシャルを念頭に置いているが，下記の補題 2 は，任意の $F \in C^3$ で成り立つ．F が (3) のような 2 重井戸型ポテンシャルの時は，van der Waals-Cahn-Hilliard の相転移理論に現れるモデル方程式である．

もし制限 $m = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx$ を課さなければ，E は F の最小点で最小化される．(3) の時は，$u = \pm 1$ である．しかし，制限を課し，さらに $-1 < m < 1$ の場合は，$u = \pm 1$ は制限を満たさないので最小点でも極小点でもない．u は ± 1 に近い方がエネルギーは小さくなり，さらに (2) の第 1 項を見ると u の変動は少ない方が良い．従って，2 項の和がバランスよく小さくなるような u で (2) の最小値は達成される．

$\varepsilon \to 0$ としたときの，(2) のエネルギー最小点 (global minimizer) の最小化列については，多くの結果が知られている．u_ε を最小化列とすると，適当に部分列を取ることにより u_ε はほとんど至るところ，$+1$ か -1 に収束し，界面 $\{u_\varepsilon \approx 0\}$ は，2 つの領域 $\{u_\varepsilon \approx 1\}$ と $\{u_\varepsilon \approx -1\}$ の体積の比を一定に保ったまま，界面の測度を最小化する [Mo87, S88]．さらに，7 次元以下の時は，平均曲率が一定となる滑らかな超曲面となるが，8 次元以上の場合は特異性を発生する可能性がある（N を空間次元とすると，特異点の集合のハウスドルフ次元は $N - 8$ 以下になることが知られている）．また，領域 Ω が凸ならば，界面は連結集合となる [SZ98]．

しかし，これらの結果は，（任意の極小点 (local minimizer) ではなく）最小点のみの性質であり，さらに ε を小さく取るばかりでなく，部分列を取らなければならないなど不満が残る．ε が必ずしも小さくない場合も含み，そもそも点列などを考えずに任意の極小点の形状を考えるために，ここでは [Mo87, S88, SZ98] でとられた方法とは異なるアプローチで極小点の形状を求める．次の補題が鍵となる．

補題２ [Mi09b, Lemma 2.2]

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を区分的になめらかな境界を持つ有界領域とする．u は (2) の臨界点とする．

$$\varepsilon^2 \Delta\varphi - f'(u)\varphi = \lambda\varphi \ \text{ in } \ \Omega, \qquad \partial_\nu u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \tag{4}$$

の第 2 固有値が正ならば，u は極小点ではない．ここで，$F'(u) = f(u)$.

ここで，(4) の左辺は，E の第 2 変分（のマイナス）である．それは Euler-Lagrange 方程式の線型化固有値問題となる．このような固有値を利用した解析は，[CGS84, GM88] でも用いられている．

補題 2 より，u が安定（すなわち E の極小点）であるためには，(4) の第 2 固有値は負でなければならない．

鈴木-田崎 [ST09] は，次の Fix-Caginalp 方程式の定常解を考えた：

$$\begin{cases} \tau\varphi_t = \xi^2\Delta\varphi + \varphi - \varphi^3 + 2u & \text{in } \ \Omega \times (0,T), \\ u_t + \dfrac{l}{2}\varphi_t = \kappa\Delta u & \text{in } \ \Omega \times (0,T), \\ \partial_\nu\varphi = \partial_\nu u = 0 & \text{on } \ \partial\Omega \times (0,T). \end{cases}$$

定常解は u が定数関数となることに注意すると，定常問題は次の変分構造を持つ：

$$I(\varphi) := \int_\Omega \left(\frac{\xi^2|\nabla\varphi|^2}{2} + \frac{1}{4}(\varphi^2-1)^2 \right) dx + \frac{2}{|\Omega| l} \left(m - \frac{l}{2} \int_\Omega \varphi dx \right)^2.$$

この臨界点の安定性も，I に非局所項を含むため補題 1 と 2 と同様の性質を持つ．

2 モース指数１の解の形状

活性因子・抑制因子系の shadow system，制限の付いた変分問題，Fix-Caginalp 方程式の定常問題に現れる汎関数の安定定常解の形状を求める問題は，第 2 固有値が負となる単独方程式の解の形状を求める問題に帰着されることを，前節で見た．以下このような解を「モース指数 1 の解」と呼ぶことにする．ここでモース指数とは，重複度を込めた正の固有値の数のことである（第 2 固有値が負ならば，正の固有値は第 1 固有値しかなく，一般論から第 1 固有値は重複度 1 であることが知られているので，モース指数は 1 となる．モース指数 0 の解は，凸領域上では定数解しかないことは，[CH78, Ma79] で示されている）．すなわち下記の Neumann 問題のモース指数 1 の解を考える：

$$\Delta u + f(u) = 0 \ \text{ in } \ \Omega, \qquad \partial_\nu u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega. \tag{5}$$

モース指数 1 の解の形状は，領域 Ω の形状に依存する．ここでは，(i) 1 次元区間，(ii) 2 次元矩形領域，(iii) 2 次元球領域，の場合を考える．第 3 節で，一般次元の有界凸領域の場合について考える．

ところで，「多次元領域内で定義された関数をどのように数学的に表すか？」といった問題が潜在的であるために，どのような視点から解析を行ってよいのかすら定かでないことが，解の形状を求める問題を難しくしている原因の一つであると思われる（凸領域における単独方程式の場合は，安定解は定数解のみであるので，この問題に答える必要がなかった．また 1 次元の shadow system の場合は，下記の 2.1 節で見るように「単調関数」と表現できたので，この場合も問題にならなかった）．ここでは，(これまでにも他の問題でとられていた方法であるが) 最大点（もしくは臨界点）の位置と個数によって表現することを試みる．

2.1 1次元区間の場合

定理 A

Ω を1次元有界区間とする．u を (5) の非自明解とする．u が Ω の内点で臨界点を持つならば，モース指数は2以上となる．従って，モース指数が1ならば，内部に臨界点を持たないので u は狭義単調増もしくは狭義単調減少となる．特に，最大値と最小値は境界で達成される．

この定理は，[N94, NTY01, FR01] などで，用いられている．証明は次のようにする：$u_{xx}+f(u)=0$ を微分すると，u_x は線形化方程式を満たすことが分かる．また境界も込めて少なくとも2つの u_x のゼロ点で囲まれた区間があるので，適当な線形結合を考えると，第2固有値の変分法的な特徴付けから正であることが分かる．

2.2 2次元矩形領域の場合

定理 B

Ω を2次元矩形領域とする．u を (5) の非自明解とする．u が Ω の内点で臨界点を持つならば，モース指数は2以上となる．また，モース指数が1ならば，ある方向に関して u は単調増加となり，最大値と最小値は境界上で達成される．

証明は，u_x，u_y のゼロ等高線を考える．内点で臨界点を持つとすると，少なくとも2つ以上の結節領域を持つので，1次元区間の場合と同様に，適当な線形結合を試験関数として用いる．証明の詳細は，[Mi07b]．シリンダー領域 $\Omega=D\times[0,L]$ の場合と証明が似ているが，2次元の場合は，[GM88] より若干強い結果を示すことができる．

2.3 2次元球領域の場合

定理 C

Ω を2次元球領域とする．u を (5) の非自明解とする．u が Ω の内点で臨界点を持つならば，モース指数は2以上となる．また，モース指数が1ならば，領域の境界でちょうど2個の臨界点を持ち，それぞれ最大点と最小点となる．さらに，(最大値と最小値以外の u と交わる）任意の等高線は C^1-曲線となり，さらに領域を2つの単連結領域に分割する．図1を参照．

この定理の証明は，u_x, u_y, $u_\theta(:=-yu_x+xu_y)$ の零等高線の詳細な解析による．証明の詳細は [Mi07a, Mi09a]．

拡散係数は1に固定されているが，領域の大小が拡散係数の大小に対応する．従ってこの定理は2次元球領域ならば任意の大きさで成り立つので，拡散係数に関する仮定がないことと同等である．拡散係数が小さい場合，特異摂動を利用した解の形状に関する研究は多くなされているが，定理 C は，拡散係数の大小にかかわらず，安定解の形状は境界スパイク解に似たものに限ることを示している．拡散係数がある程度大きい場合 [Mi07b]，もしくは $f''>0$ の場合 [CL03]，中心線に関する u の対称性も示すことができる．一般の f について，モース指数1の解の線対称性は未解決である（$f''>0$ の仮定を外すと，rotating plane method が破綻する）．

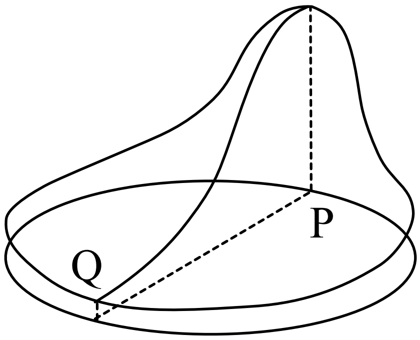


図 1: 定理 C の一例．モース指数 1 の解の形状．このような形のみが安定となりえる．

3 非線形ホットスポット予想

第 2 節では，区間，矩形領域，円板領域の場合のモース指数 1 の解，すなわち第 1 節で挙げた問題の安定定常解の形状を求めた．いずれの場合も，領域の内部で臨界点を持つ場合は第 2 固有値が正となり従って不安定となるという結果となった．特に内部ピークがあると，ピークの頂点が臨界点となるために必ず不安定となる．安定解は内部ピークを持たない．

モース指数が 1 となるためには，内部で臨界点を持ってはならない．そこで凸領域においても同じことが成り立つのではないかと，自然に予想される：

非線形ホットスポット予想 (柳田 [Y06])

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界凸領域とする．u を次の Neumann 問題の非自明解とする：

$$\Delta u + f(u) = 0 \ \text{ in } \ \Omega, \qquad \partial_\nu u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega.$$

Ω の内部において u が臨界点を持つならば，対応する線形化固有値問題の第 2 固有値は正．

一見しただけでは，次に述べる関係は必ずしも明らかではないが，柳田は上記の予想が第 4 節で述べるホットスポット予想 [R74] の非線形版であることを指摘した [Y06]．非線形ホットスポット予想が証明されれば，(線形) ホットスポット予想は自動的に従う．定理 ABC は上記予想のそれぞれの領域の場合の肯定的解答である．

柳田の指摘 [Y06] を受けて，筆者は 2006 年に，[CH78, Ma79] との質的な類似性にヒントを得て，非線形ホットスポット予想が，非線形 Sturm-Liouville 理論の高次元版であることに気づき，表 2 の関係を得た．非線形ホットスポット予想だけを見ると，凸領域における半線形楕円型方程式の解の臨界点の個数とモース指数との関係に表面的には見えるが,「モース指数が n ならば，どのような形か？」といった問題を考えた方が統一的な視点から考察できることを，表 2 は示している．この視点から見ると，臨界点の個数は解の形状を表すための手段の 1 つと捉えることができる．また非線形ホットスポット予想の限界も垣間見える．それは，対偶命題を考えても境界上の臨界点の個数についてはなにも分からないことである．

ところで，[CH78, Ma79] の結果はモース指数 0 の場合に相当する．1 次元の場合は，Brunovsky-Fiedler の理論（非線形 Sturm-Liouville 理論）となる．Sturm-Liouville 理論とは，線形方程式

$$\varphi_{xx} + V(x)\varphi = 0 \ \text{ in } \ (0, L), \qquad \varphi_x = 0 \ \text{ on } \ x = 0, L$$

のモース指数が，φ の零点の個数と一致しているという理論である．Brunovsky-Fiedler は 1 次元

	線形	非線形
モース指数 0	Neumann ラプラシアンの第 1 固有関数は定数	Casten-Holland と俣野の結果
モース指数 1	ホットスポット予想	非線形ホットスポット予想
モース指数 n	第 $(n+1)$ 固有関数はどのような形か？	解はどのような形か？

表 2: 解の形状とモース指数の関係における，予想と既知の結果.

	方程式	領域	解
非線形ホットスポット予想	$\Delta u + f(u) = 0$	凸領域	任意の解
Ni-高木の問題	$\varepsilon^2 \Delta u - u + u^p = 0$	任意の領域	Least-energy solution

表 3: 非線形ホットスポット予想と Ni-高木の問題 [NT91, NT93] との関係.

区間で (5) を考え，u が定数解でない場合，モース指数は u の領域内部の臨界点の個数の「＋１」か「＋２」であることを用いて，対応する放物型方程式の Heteroclinic 軌道の詳しい解析を行った．特に，(5) を x で微分すると，

$$(u_x)_{xx} + f'(u)u_x = 0 \ \text{ in } \ \Omega, \qquad u_x = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \ \ (\text{しかし } \partial_\nu u_x \neq 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega)$$

となり，u_x は，Neumann 境界条件は満たさないが，線形化方程式を満たすという事実を用いている．従って，Brunovsky-Fiedler の理論は，Sturm-Liouville 理論の非線形版と見なせる．Sturm-Liouville 理論は，Sturm が 1836 年に，Liouville が 1837 年に発表した論文に起源を持つが，線形と非線形ホットスポット予想が，その非線形高次元版となることは，(2006 年まで）170 年間気づかれなかったと思われる．表 2 は（手前味噌ながら）非常に重要な視点を与えている．

モース指数が 2 以上の場合は，どのような予想が成り立ちそうかすら，定かではないが，特定の方程式だが特異摂動を利用した（モース指数と臨界点の個数に関する）高橋の研究 [T09] は示唆に富むと思われる．

表 3 は，Ni-高木の問題 [NT91, NT93] と非線形ホットスポット予想を比較したものである．Ni と高木は，$\varepsilon^2\Delta u - u + u^p = 0$ の Neumann 問題のいわゆる Least-energy solution の解の形状を研究した．その結果によると，Least-energy solution は，領域の境界の平均曲率が最大となる点にピークを持つ境界スパイク解となる．Least-energy solution は，解の変分法的な特徴付けからモース指数が 1 であることが知られているので，凸領域の場合は非線形ホットスポット予想の適用範囲内であり,（当然のことながら）矛盾しない．従って，非線形ホットスポット予想では領域は凸領域に制限されるものの，方程式と解の種類は一般的であるので，Ni-高木の問題の（領域の制限を除けば）一般化ともみなせる．

石毛 [I06] によると，Ni-高木の一連の研究 [NT91, NT93] は，もともと (線形) ホットスポット予想の非線形版を研究したいといった動機から始められたそうである．従って，上記の非線形ホットスポット予想と全く同じ定式化ではないかもしれないが，非線形楕円型方程式の解において，第２固有値の符号と内点における最大点の存在との関連性は，少なくとも Ni と高木によって 1980 年代後半から認識されていた．

非線形ホットスポット予想は，第２節で紹介した，１次元区間，２次元矩形領域，２次元円板領域の他にも，シリンダー領域ならば（厳密には若干弱いステートメントが）成り立つことが（実質的には）知られているが [GM88]，他の領域では未解決である．

4 (線形) ホットスポット予想

(線形) ホットスポット予想 (J. Rauch[R74])

Ω を滑らかな境界を持つ有界凸領域とする．Ω 上の Neumann 境界条件下の Laplacian の任意の第２固有関数の最大値と最小値は，境界上で達成される．

ホットスポット予想の名前の由来は，熱方程式の解の最大点（ホットスポット）の挙動に由来する．滑らかな境界を持つ有界領域 Ω 上の Neumann 境界条件下の熱方程式

$$U_t = \Delta U \ \ \text{in} \ \ \Omega, \qquad \partial_\nu U = 0 \ \ \text{on} \ \ \partial\Omega, \qquad U(x,0) = U_0(x)$$

の解を，Laplacian の固有関数を用いて無限級数に展開する．

$$U(x,t) = e^{-\lambda_0 t} \langle U_0, \varphi_0 \rangle \varphi_0 + e^{-\lambda_1 t} \langle U_0, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + e^{-\lambda_2 t} \langle U_0, \varphi_2 \rangle \varphi_2 + \cdots ,$$

ここで，Ω における Neumann 境界条件下の $-\Delta$ の（重複度の数だけ同じ値を並べた）固有値を λ_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$，対応する L^2-ノルムで正規化された固有関数を φ_j とし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を L^2 内積を表すものとする．

第 1 固有関数 φ_0 は定数であるので，第 1 項は最大点の位置には影響を及ぼさない．簡単のため第２固有値 λ_1 は単純と仮定する．すなわち，$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$．このとき，第３以降の固有関数の成分 $e^{-\lambda_j t} \langle U_0, \varphi_j \rangle$ $(j \geq 2)$ は，第２固有関数の成分 $e^{-\lambda_1 t} \langle U_0, \varphi_1 \rangle$ より早く減衰するので，初期関数が第２固有関数に直交していなければ（$\langle U_0, \varphi_1 \rangle \neq 0$ ならば），熱方程式の解の最大点は第２固有関数 φ_1 の最大点に近づく．従って，ホットスポット予想とは，凸領域の場合には，最も暖かい点は，時間とともに領域の境界に近づくという予想である．

1974 年，J. Rauch は Tulane 大学で開催された偏微分方程式のコンファレンスで講演を行い「(凸性は仮定せずに）任意の領域において "unexceptopnal cases" では，第２固有関数の最大と最小が境界上の孤立した点で達成される」といった予想を提案した．この予想は，その時点で既に知られていたが，[R74, p. 359] は，恐らく最初の文献（講演）であるため，Rauch の予想と呼ばれている．最初の非自明な結果は Kawohl [K85] によるもので，シリンダー領域 $(0,1) \times D$ において肯定的に解決された．さらに，[K85, p. 46] において，平行六面体，球領域，円環領域の場合は既に示されていたとの記述がある．

一方，[K85, p. 56] において，「For non-convex domains J. Hersch believes to have a counter-example to J. Rauch conjecture.」との記述があり，Kawohl は凸性の仮定を付け加えて現在知られている形（上記の予想）にした．その後，14 年間，文献の上では進展がなかったが，1999 年から主に確率論の "coupling" と呼ばれる手法を用いて，続々と結果が発表された．1999 年，Burdzy-Werner [BW99] は確率論の手法を用いて，初めて反例を与えた．その反例は２次元の穴のある領域である．Werner は，この他にも２次元のブラウン運動の理論などが評価され，2006 年の ICM マドリードでフィールズ賞を受賞した．1999 年に，Bañuelos-Burdzy [BB99] は，２次元凸領域で x と y 軸に関して対称で，軸の長さの比が 1.54 より大きい（第２固有値が単純になるための条件）場合に，確率論の手法を用いて肯定的に解決した．Jerison-Nadirashvili [JN00] は，上記の軸の比率の仮定を外して（従って，第２固有値は重複する場合を含む），x と y 軸に関して対称な任意の２次元凸領域において，複素解析の手法を用いて肯定的に示した．2002 年に Pascu [P02] は，y 軸に関して対称な２次元凸領域で，第２固有関数が y 軸に関して奇関数となる場合に，確率論の手法を用いて肯定的に示した（２軸の対称性は必要ないが，奇関数の仮定は外せないので，[BB99, JN00] の結果を完全には含んでいない）．2004 年，Atar-Burdzy [AB04] は，Lip domain と呼ばれる横長の２次

元領域

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ g(x) < y < f(x),\ \|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|g\|_{\mathrm{Lip}} = 1\}$$

で，確率論の手法を用いて肯定的に示した（Lip domain ならば，非凸領域でも成立する）．このLip domain の境界は，２つの 90 度以下のコーナー点を持つことに注意する（Lip domain は正方形を除き第２固有値が単純となる）．まとめると，Lip domain 以外は，１軸か２軸の対称性が必要であり，完全に対称性のない場合は知られていなかったが，最近筆者によって対称性を持たない 2 次元凸のある領域のクラスについて肯定的に解決された [Mi09a]（この領域のクラスは，第２固有値が重複する場合を含む）．それについて紹介したい．

定理 D[Mi09a, Theorem A, Lemma B]

Ω を２次元凸領域とし，$d := \sup_{p,q\in\Omega} |p-q| (:= \mathrm{diam}(\Omega))$ とする．

(i) $\dfrac{d^2}{|\Omega|} < \dfrac{j_0^2}{\pi j_1^2} \approx 1.378$ ならば，予想は成立する．

(ii) Ω は幅 l の短冊領域に含まれているとする．$\dfrac{dl}{|\Omega|} < \dfrac{j_0}{\pi} \approx 1.219$ ならば，予想は成立する．

(iii) λ_1 を領域 Ω における $-\Delta_N$ の第２固有値とする．$\sqrt{\lambda_1} < \dfrac{j_0}{d}$ ならば，予想は成立する．

ここで，$j_0 \approx 3.831$, $j_1 \approx 1.841$ は，第１種ベッセル関数の導関数 $J_k'(\cdot)$ $(k = 0, 1)$ の正の最小の非自明零点とする．

このレクチャーノートの執筆時点で出版済みの肯定的な結果は，ここで紹介した結果 [K85, BB99, JN00, P02, AB04, Mi09a] で全てであると思われる．一方，否定的な結果は [BW99] 以外にいくつかあるものの [BB00, B05]，それらは全て穴の開いた領域である．穴の開いていない反例は，現在でも知られていない．また，[B05, Conjecture 1.2 (ii)] には，「known among experts」として，**2** 次元の場合だけは（凸領域のみならず）任意の単連結領域でも成り立つとの予想もあるとの記述があるが，未解決である．

5 今後の展望

(線形) ホットスポット予想と非線形ホットスポット予想の解決は一つの方向であるが，完全な解決はテクニカルに非常に難しいと思われるため，他の方向に模索することも必要である．すぐに思い当たるものは，(N) の仮定を緩めた場合の shadow system の線形化方程式の固有値問題の解析，第２固有値の符号の決定に帰着する他のモデル方程式の研究，特殊な領域における高次元非線形 Sturm-Liouville 理論の構築，３種系の安定解の形状，などである．一様媒質下の単独半線形楕円型方程式 $\Delta u + f(u) = 0$ の研究は，40 年以上の歴史があり，すでに様々な性質が知られているが，Dirichlet 境界条件で知られていることが（モデル方程式において自然な）Neumann 境界条件に変えるだけで未解決になるなど，まだまだ研究する余地は残されていると思われる．

伝統ある分野にこそ，今までの常識を覆す若い方のアイデアと，新たな研究領域を（独力で）開拓し，この分野における全ての研究者（延いては全世界の人々）の認識を一変さようといった気概が必要とされている．

謝辞　本稿は，“非線形ホットスポット予想とパターン形成” [Mi09c] に，制限の付いた変分問題や線形ホットスポット予想に関する結果を中心に，加筆修正したものです．

柳田英二教授は，非線形ホットスポット予想が (線形) ホットスポット予想の非線形版であることを筆者に指摘してくださいました [Y06]．石毛和弘准教授は，Ni-高木 [NT91, NT93] の研究の背

景について筆者に解説してくださいました [I06]．この場を借りて両氏に御礼申し上げます．また，本講演の機会を与えて下さいました組織委員の皆様に感謝申し上げます．

参考文献

[AB04] R. Atar and K. Burdzy, *On Neumann eigenfunctions in lip domains*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 243–265.

[B05] K. Burdzy, *The hot spots problem in planar domains with one hole*, Duke Math. J. **129** (2005), 481–502.

[BB99] R. Banuelos and K. Burdzy, *On the "hot spots" conjecture of J. Rauch*, J. Funct. Anal. **164** (1999), 1–33.

[BB00] R. F. Bass and K. Burdzy, *Fiber Brownian motion and the "hot spots" problem*, Duke Math. J. **105** (2000), 25–58.

[BW99] K. Burdzy and W. Werner, *A counterexample to the "hot spots" conjecture*, Ann. of Math. **149** (1999), 309–317.

[C75] N. Chafee, *Asymptotic behavior for solutions of a one-dimensional parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions*, J. Differential Equations **18** (1975), 111–134.

[CGS84] J. Carr, M. Gurtin and M. Slemrod, *Structured phase transitions on a finite interval*, Arch. Rational Mech. Anal. **86** (1984), 317–351.

[CH78] R. Casten and R. Holland, *Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions*, J. Differential Equations **27** (1978), 266–273.

[CL03] J.-L. Chern and C.-S. Lin, *The symmetry of least-energy solutions for semilinear elliptic equations*, J. Differential Equations **187** (2003), 240–268.

[FR01] P. Freitas and C. Rocha, *Lyapunov functionals and stability for FitzHugh-Nagumo systems*, J. Differential Equations **169** (2001), 208–227.

[GM72] A. Gierer and H. Meinhardt, *A theory of biological pattern formation*, Kybernetik (Berlin), **12** (1972), 30–39.

[GM88] M. E. Gurtin and H. Matano, *On the structure of equilibrium phase transitions within the gradient theory of fluids*, Quart. Appl. Math. **46** (1988), 301–317.

[I06] K. Ishige, Private communication (2006).

[JM94] S. Jimbo and Y. Morita, *Stability of nonconstant steady-state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions*, Nonlinear Anal. **22** (1994), 753–770.

[JN00] D. Jerison and N. Nadirashvili, *The "hot spots" conjecture for domains with two axes of symmetry*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), 741–772.

[K85] B. Kawohl, Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE, *Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1150. Springer-Verlag, Berlin, 1985. iv+136 pp. ISBN: 3-540-15693-3.*

[LM89] S. Luckhaus and L. Modica, *The Gibbs-Thompson relation within the gradient theory of phase transitions*, Arch. Rational Mech. Anal. **107** (1989), 71–83.

[Ma79] H. Matano, *Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **15** (1979), 401–454.

[Mi05] Y. Miyamoto, *Stability of a boundary spike layer for the Gierer-Meinhardt system*, European J. Appl. Math. **16** (2005), 467–491.

[Mi06a] Y. Miyamoto, *Upper semicontinuity of the global attractor for the Gierer-Meinhardt model* J. Differential Equations **223** (2006), 185–207.

[Mi06b] Y. Miyamoto, *An instability criterion for activator-inhibitor systems in a two-dimensional ball*, J. Differential Equations **229** (2006), 494–508.

[Mi07a] Y. Miyamoto, *An instability criterion for activator-inhibitor systems in a two-dimensional ball II*, J. Differential Equations **239** (2007), 61–71.

[Mi07b] Y. Miyamoto, *On the shape of the stable patterns for activator-inhibitor systems in two-dimensional domains*, Quart. Appl. Math. **65** (2007), 357–374.

[Mi09a] Y. Miyamoto, *The "hot spots" conjecture for a certain class of planar convex domains*, J. Math. Phys. **50** (2009), 103530, 7 pp.

[Mi09b] Y. Miyamoto, *Global bifurcation and stable two-phase separation for a phase filed model in a disk*, Preprint

[Mi09c] 宮本 安人, 非線形ホットスポット予想とパターン形成, 応用数理 **19**(1) (2009), 16–27.

[Mo87] L. Modica, *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion*, Arch. Rational Mech. Anal. **98** (1987), 123–142.

[N82] Y. Nishiura, *Global structure of bifurcating solutions of some reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 555–593.

[N94] Y. Nishiura, *Coexistence of infinitely many stable solutions to reaction diffusion systems in the singular limit*, Dynamics Reported **3** (1994), 25–103.

[NPY01] W. M. Ni, P. Poláčik and E. Yanagida, *Monotonicity of stable solutions in shadow systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 5057–5069.

[NT91] W. M. Ni and I. Takagi, *On the shape of least energy solution to a semilinear Neumann problem*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1991), 819–851.

[NT93] W. M. Ni and I. Takagi, *Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem*, Duke Math. J. **70** (1993), 247–281.

[NTY01] W. M. Ni, I. Takagi and E. Yanagida, *Stability of least energy patterns of the shadow system for an activator-inhibitor model*, Japan J. Indust. Appl. Math. **18** (2001), 259–272.

[P02] M. Pascu, *Scaling coupling of reflecting Brownian motions and the hot spots problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 4681–4702.

[R74] J. Rauch, *Five problems: an introduction to the qualitative theory of partial differential equations*, Partial Differential Equations and Related Topics (Jerome A. Goldstein, ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1974, 355–369, Lecture Notes in Mathematics 446.

[S88] P. Sternberg, *The effect of a singular perturbation on nonconvex variational problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **101** (1988), 209–260.

[ST09] T. Suzuki and S. Tasaki, *Stationary Fix-Caginalp equation with non-local term*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 1329–1349.

[SZ98] P. Sternberg and K. Zumbrun, *Connectivity of phase boundaries in strictly convex domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **141** (1998), 375–400.

[T09] 高橋 太, ある 2 次元楕円型方程式の正値解の Morse 指数と最大点の個数について, 日本数学会 2009 年度秋期総合分科会（大阪大学）函数方程式分科会講演アブストラクト, 72–73.

[WW03] M. Ward and J. Wei, *Hopf bifurcation of spike solutions for the shadow Gierer-Meinhardt model*, European J. Appl. Math. **14** (2003), 677–711.

[Y02] E. Yanagida, *Mini-maximizers for reaction-diffusion systems with skew-gradient structure* J. Differential Equations **179** (2002), 311–335.

[Y06] E. Yanagida, Private communication (2006).

明治大学 理工学部

二宮　広和

現在は、反応拡散系の解の形状や拡散の役割に関して研究しています。いい研究テーマを見つけるのは、難しいもので、人はどうやって研究テーマを決めているのだろうと考えることが最近多くなりました。そんなわけで自分の研究テーマの変遷を見直すいい機会だと思いますので、書いておきます。

学生の頃は、線形偏微分方程式や擬微分作用素などを勉強していました。三村先生や西浦先生が特異摂動法でいろんな解を構成されていて、少しずつ非線形問題に興味を持つようになってきました。その頃は、慣性多様体の勉強をしていました。東工大で柳田先生らと 2 種競争系の研究を行いました。双安定な状態（2 種のうち、どちらかの種が生き残るような状況）を考え、至る所優勢な種（常微分方程式の解としては生き残る種）が拡散によって絶滅するようなこと（拡散誘導絶滅）が起きることを示しました。この研究の頃から、拡散の役割に興味をもち始めました。拡散によってどんなことが起きると面白いのかなという観点から、拡散誘導爆発や拡散誘導抑止などの爆発問題に関する研究を行いました。各個体の拡散と濃度の拡散の違いは未だによく分かりませんが、理解したいなと思って反応拡散近似に関する研究を行い、交差拡散不安定性とチューリング不安定性の関係を示しました。最近では、空間パターンのある解の構成に興味をもち、空間パターンをもった進行波解の構成を行っています。こんな具合に、いろいろと紆余曲折しながら、研究を行ってきました。今度お会いするときは、皆さんの研究テーマの変遷も聞かせて下さい。

冬の学校 (Dec. 9–11, 2009)

最大値原理から見たパターン形成*
—進行波解と全域解—

二宮 広和 (明治大学 理工学部)

1 はじめに

拡散現象のような現象においては，エネルギーの散逸によって伝播する過程で形が崩れてしまう．熱（拡散）方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

を考えよう．初期値として，$u(x,0) = \sin x$ をとると，解は $u(x,t) = e^{-t}\sin x$ となり，だんだんと平坦になってしまう．そのため，一定の形で波が伝わっていくためには，形状と拡散の釣り合いが重要となる．例えば，(1.1) には

$$u(x,t) = e^{-c(\pm x - ct)} \tag{1.2}$$

という解が存在する．これは，エネルギーの散逸とそれに見合うエネルギーが遠方からやってくるため，形を崩さず一定の速度 $\pm c$ で進行する解となっている．このように一定の形状を保って，一定の速度で移動する解を進行波解という．この解は遠方で発散することにより，その形状を保っていたが，外力が加わることによって，形状はさらに保ちやすくなる．

この解は，時間 t が負の方にも存在する解になっている．通常の関数空間では，熱方程式は時間負の方向の初期値問題は適切でない．例えば，

$$u_n(x,t) = e^{-n^2 t}\sin nx$$

*この解説は，[59] および [43] をもとにしている．

は解である．$\|u_n(\cdot,0)\|_{L^\infty}=1$ であるが，$\|u_n(\cdot,-1)\|_{L^\infty}$ は非有界になっていて，適切でないことがわかる．しかし，特殊な解は，時間負の方向にも存在する．すべての時間 $t\in\mathbb{R}$ で存在する解を全域解という．

熱方程式は，さらに以下のようなことも教えてくれる．この解 (1.2) は，すべての c に対して存在するので，さまざまな速度の進行波解が共存している．この方程式は線形なので，異なる速度の進行波解を足し合わせたものも解である．例えば，$c_1>c_2>0$ とすると，

$$u(x,t)=e^{-c_1(x-c_1t)}+e^{-c_2(x-c_2t)}$$

も解になっているが，これは，もはや進行波解ではない．$t\in\mathbb{R}$ で存在するので，全域解になっている．時間 t に依存して形状がどのように変化するのか考えてみよう．$t\to-\infty$ では，$e^{-c_1(x-c_1t)}$ は $x=-c_1|t|\ll-1$ に位置している指数関数なので，x を固定すると非常に小さくなり，$e^{-c_2(x-c_2t)}$ が見えていることになる．$t\to\infty$ では，$e^{-c_2(x-c_2t)}$ は $x=c_2t$ に位置する指数関数なので，$e^{-c_1(x-c_1t)}$ が見えていることになる．つまり，$t\to-\infty$ では，遅い進行波解 (速度 c_2) のように振る舞うが，$t\to\infty$ では，速い進行波解 (速度 c_1) のように加速する全域解であることがわかる．

このように，熱方程式は，平衡な状態に収束していく簡単なダイナミクスと考えられがちだが，多くの解を含んでいることがわかる．ここでは，反応項をもった反応拡散方程式あるいは反応拡散系について考える．中でも，Allen-Cahn 方程式，Fisher-KPP 方程式と呼ばれる方程式をとりあげる．熱方程式から得られる知見の多くを，反応拡散方程式に当てはめられるかというと必ずしもそうではない．線形性に対応するような性質を非線形性の中に見いだすには，それなりの変換が必要になる．ここでは，その変換に注目しながら，全域解，進行波解についての説明をおこなっていく．

以下のような半線形熱方程式を考えよう．

$$u_t=\Delta u-f(u). \tag{1.3}$$

$f(u)=-u(1-u)=u(u-1)$ のとき，この方程式は，Fisher-KPP 方程式とよばれ，$f(u)=-u(1-u)(u-a)=u(u-1)(u-a)$ のとき，Nagumo 方程式あるいは Allen-Cahn 方程式とよばれる．代入すると方程式は，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u(1-u)(u-a),\qquad 0<a<1, \tag{1.4}$$

となっており，潜熱がない場合の相転移問題などから現れる．u は秩序変数と呼ばれるもので，$u=1$ のとき固相を表し，$u=0$ のとき液相を，$u=a$ のとき無秩序状態を表している．高温状態のときは無秩序状態 $u=a$ であるが，温度を下げていくに従って固相と液相が共存するようになる．パラメーター a は通常，温度に依存する．a によって固相になりやすいか，液相になりやすいかが変わってくる．$a=1/2$ のとき液相と固相が対等な状態となっている．u の代わりに $2u-1$ を考えることにより，$f(u)=(u+1)(u-a)(u-1)$

を考えることもある．この方が，対称性がいいので，分かりやすい場合もある．拡散項のない常微分方程式では，a が不安定な定常解で，$0, 1$ が 2 つの安定な定常解となっているので，双安定系と呼ばれる．

一方，Fisher-KPP 方程式の拡散項を除いた常微分方程式では，0 が不安定，1 が安定な定常解なので，単安定系と呼ばれる．進行波解の性質は，双安定な場合と単安定な場合で状況が大きく変わる．

2 進行波解と優解・劣解

Allen-Cahn 方程式の進行波解の存在を優解・劣解を用いて示そう．ここでの証明は，

$$f(\pm 1) = 0, \qquad f'(\pm 1) > 0,$$

を仮定すれば十分である．進行波解と同じ速度で運動する動座標系 $z = x - ct$ を導入することにより，方程式 (1.3) は，

$$w_t - cw_z - w_{zz} + f(w) = 0 \tag{2.1}$$

となるので，

$$\mathcal{F}[w] := w_t - cw_z - w_{zz} + f(w)$$

とおく．また，

$$\mathcal{F}_0[w] := w_t - w_{zz} + f(w)$$

とおく．

$$-c\Phi' - \Phi'' + f(\Phi) = 0, \qquad \Phi(-\infty) = -1, \qquad \Phi(\infty) = 1, \qquad \Phi' > 0 \tag{2.2}$$

をみたす速度 c の進行波解 $\Phi(z)$ が存在するとする．つまり，(2.1) の定常解であり，

$$\mathcal{F}[\Phi] = 0$$

をみたしている．この進行波解の安定性を見ていこう．

補題 **2.1 (Chen [9])**．$w^{\pm}(z, t)$ を

$$w^{\pm}(z, t) \;\; := \;\; \Phi(z \pm \sigma\delta(1 - e^{-\beta t})) \pm \delta e^{-\beta t}$$

とおく．ある（十分大きな）σ が存在して，$\delta \in (0, \delta_1/2]$ に対して w^+, w^- は，それぞれ (2.1) の優解・劣解になる．

[証明]　$\xi = z \pm \sigma\delta(1 - e^{-\beta t})$ として，$w^{\pm}$ を代入して，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[w^{\pm}] &= \pm\Phi'\sigma\delta\beta e^{-\beta t} \mp \delta\beta e^{-\beta t} - c\Phi' - \Phi'' + f(\Phi \pm \delta e^{-\beta t}) \\ &= \pm\delta\beta e^{-\beta t}(\Phi'\sigma - 1) - f(\Phi) + f(\Phi \pm \delta e^{-\beta t}) \\ &= \pm\delta\beta e^{-\beta t}\Big(\Phi'(\xi)\sigma - 1 + \frac{1}{\beta}\int_0^1 f'(\Phi(\xi) \pm \theta\delta e^{-\beta t})d\theta\Big)\end{aligned}$$

と変形できる．ここで，括弧内を J とおく．つまり，

$$J := \Phi'(\xi)\sigma - 1 + \frac{1}{\beta}\int_0^1 f'(\Phi(\xi) \pm \theta\delta e^{-\beta t})d\theta$$

が正であることを示せばよい．Φ' が正のときは，σ を大きく取って，他の項を抑えることができる．Φ' が 0 に近づくと，これでは抑えることができないが，そこでは，Φ の値は，± 1 に近いので，f' が正になり，J が正であることが従う．

厳密に説明していこう．十分小さな正数 δ_1 を

$$f'(s) > 0 \qquad (-1-\delta_1 \le s \le -1+\delta_1,\ 1-\delta_1 \le s \le 1+\delta_1) \tag{2.3}$$

をみたすようにとり，

$$m_f := \min_{-1-\delta_1 \le s \le -1+\delta_1,\ 1-\delta_1 \le s \le 1+\delta_1} f'(s) > 0, \tag{2.4}$$

$$M_f := \max_{-1-\delta_1 \le s \le 1+\delta_1} |f'(s)| > 0, \tag{2.5}$$

$$\beta_0 := \frac{1}{2}m_f \tag{2.6}$$

とおく．このとき，

$$\gamma_1 := \min_{\Phi^{-1}(-1+\delta_1) \le \xi \le \Phi^{-1}(1-\delta_1)} \Phi'(\xi) > 0$$

となる．

$\xi \le \Phi^{-1}(-1+\delta_1),\ \Phi^{-1}(1-\delta_1) \le \xi$ のとき，

$$-1 + \frac{m_f}{\beta_0} \ge 0$$

をみたし，J が正となる．$\Phi^{-1}(-1+\delta_1) \le \xi \le \Phi^{-1}(1-\delta_1)$ のとき，

$$\sigma\gamma_1 - 1 - \frac{M_f}{\beta_0} \ge 0$$

をみたすように σ とると，J が正となり，$w^{\pm}$ が優解，劣解になることが従う．　□

補題 2.1 を用いて双安定型の単調増加な進行波解 $\Phi(x-ct)$ の一意性を示そう．

補題 2.2 (一意性). (2.2) の解は，$\Phi(\cdot+\xi)$ に限る．

[証明]　Φ 以外に別の進行波解 Ψ が存在したとしよう．Φ,Ψ が (2.2) をみたすとする．
十分小さな正数 δ と大きな正数 ξ_1,ξ_2 をとると，

$$\Phi(z-\xi_1)-\delta\le\Psi(z)\le\Phi(z+\xi_2)+\delta$$

とできる．これに補題 2.1 を用いると，

$$\Phi(z-\xi_1-\sigma\delta(1-e^{-\beta t}))-\delta e^{-\beta t}\le\Psi(z)\le\Phi(z+\xi_2+\sigma\delta(1-e^{-\beta t}))+\delta e^{-\beta t}$$

となる．$t\to\infty$ として，

$$\Phi(z-\xi_1-\sigma\delta)\le\Psi(z)\le\Phi(z+\xi_2+\sigma\delta)$$

が得られる．これより，

$$\xi^*:=\inf\{\xi\ :\ \Psi(z)\le\Phi(z+\xi)\quad(z\in\mathbb{R})\},\qquad \xi_*:=\sup\{\xi\ :\ \Psi(z)\ge\Phi(z+\xi)\quad(z\in\mathbb{R})\}$$

とし，$\xi_*=\xi^*$ を示せば一意性が示される．
$\xi_*<\xi^*$ と仮定しよう．

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\Phi'(\xi)=0$$

なので，ある正数 M が存在して，

$$2\sigma\Phi'(\xi)\le1\quad(|\xi|\ge M)$$

とできる．$\xi_*<\xi^*$ なので，$\Psi(z)\not\equiv\Phi(z+\xi^*)$ である．また，

$$\Psi(z)\le\Phi(z+\xi^*)$$

なので，強最大値の原理より十分小さな正数 h $(<1/(2\sigma))$ が存在し，

$$\Psi(z)<\Phi(z+\xi^*-2\sigma h)\quad(|z+\xi^*|\le M+1)$$

とできる．$|z+\xi^*|\ge M+1$ では，

$$\begin{aligned}\Phi(z+\xi^*-2\sigma h)-\Psi(z)&\ge\Phi(z+\xi^*-2\sigma h)-\Phi(z+\xi^*)\\&=\int_0^1\Phi'(z+\xi^*-2\theta\sigma h)d\theta\cdot(-2\sigma h)\\&\ge-h\end{aligned}$$

なので，

$$\Psi(z)<\Phi(z+\xi^*-2\sigma h)+h\quad(z\in\mathbb{R})$$

が従う．これに補題2.1をもう一度用いると

$$\Psi(z) < \Phi(z + \xi^* - 2\sigma h + \sigma h(1 - e^{-\beta t})) + he^{-\beta t}$$

となり，$t \to \infty$ で

$$\Psi(z) < \Phi(z + \xi^* - \sigma h)$$

が得られる．これは，ξ^* の定義に矛盾する．つまり，$\xi_* = \xi^*$ が示され，一意性が得られる．□

この性質を用いて，大域的な漸近安定性を示すこともできる．

この方程式の場合，常微分方程式なのでシューティング法で進行波解の存在を示すことができるので，存在に関して述べてこなかったが，多次元空間への応用や他の方程式系への応用を考慮して，優解・劣解を用いる方法を簡単に紹介する．

まず，$\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ を以下のような関数にとろう．

$$\zeta' > 0, \quad |\zeta''| \leq 1 \ (x \in \mathbb{R}), \quad \zeta(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x \geq 4). \end{cases}$$

$u_0 = 2\zeta - 1$ を初期値とする解 $u(x,t) = u(x,t;u_0)$ を考え，その収束先を求めよう．

補題 2.3 (Chen [9]). $\delta \in (0, \delta_1)$ に対して，ある正数 ε と C が存在して

$$\begin{aligned} w^+(x,t) &:= 1 + \delta - (2 - (1 + a_1 - 2\delta)e^{-\varepsilon t})\zeta(-\varepsilon(x + Ct)) \\ w^-(x,t) &:= -1 - \delta + (2 + (1 + a_2 + 2\delta)e^{-\varepsilon t})\zeta(\varepsilon(x - Ct)) \end{aligned}$$

で定められる w^+, w^- は，それぞれ (2.1) の優解・劣解になる．ここで，$-1 < a_1 < a_2 < 1$ は

$$f(u) > 0 \quad (-1 < u < a_1, 1 < u < 2), \quad f(u) < 0 \quad (-2 < u < -1, a_2 < u < 1)$$

をみたすとする．

[証明]

$$\mathcal{F}_0[w^+] \;=\; -\varepsilon(1 + a_1 - 2\delta)e^{-\varepsilon t}\zeta + (2 - (1 + a_1 - 2\delta)e^{-\varepsilon t})(\varepsilon C\zeta' + \varepsilon^2\zeta'') + f(w^+)$$

と計算できる．$\zeta < \delta/4$ のときは，$w^+ > 1 + \delta/2$ なので，$\min_{1+\delta/2<x<2} f(x) > 0$ を用いて $\mathcal{F}_0(w^+) > 0$ がわかり，$\zeta \geq 1 - \delta/2$ のときは，

$$-1 + \delta \leq w^+(x,t) \leq 1 + \delta - (2 - (1 + a_1 - 2\delta)e^{-\varepsilon t})(1 - \delta/2) \leq a - (1 + a_1)\delta/2 + \delta^2$$

なので，$\min_{-1+\delta<x<a_1-\delta} f(x) > 0$ を用いて，$\mathcal{F}_0(w^+) > 0$ が従う．$\delta/4 \le \zeta \le 1-\delta/2$ では，ζ' は正なので，C を十分大きくとると，$\mathcal{F}_0(w^+) > 0$ が得られ，w^+ が優解であることがわかる．w^- も同様に示すことができる． □

$u(x,t) = u(x,t;\zeta)$ は，$t>0$ で x に関して単調非減少で，この補題より，

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} u(x,t) = -1$$

がわかる．

$$u(z(\alpha,t),t) = \alpha$$

となる $z(\alpha,t)$ は $\alpha \in (-1,1), t>0$ に対して一意的に決まる．部分列 t_j をとると，$\xi \in \mathbb{R}$ に対して $u(\xi + z(a,t_j),t_j) \to U(\xi)$ とできる．次に，$U(x)$ を初期値とする解 $v(x,t) = u(x,t;U)$ を考えよう．補題 2.1 から

$$v(\xi-\xi_0,1) \le U(\xi) \le v(\xi+\xi_0,1)$$

がわかる．補題 2.2 と同じようにして，$v(\xi,1) = U(\xi)$ が従う．同様にして

$$v(\xi,t) = U(\xi - c(t))$$

が得られるので，方程式に代入して

$$-c'(t)U'(\xi) = U''(\xi) - f(U(\xi))$$

となり，$c'(t)$ が定数であることが従い，進行波解であることがわかる．

3 多次元進行波解

ここでは 2 次元以上の全空間における進行波解について考えよう．$f(u)$ は，$(u^2-1)(u-a)$ のような $(-1,a,1$ だけで 0 となる$)$ 関数とし，$\mathbb{R}^N$ 上の Allen-Cahn 方程式

$$u_t = \Delta u - f(u) \tag{3.1}$$

を考える．方程式 (3.1)(あるいは (1.4)) は，正の速度 k をもつ 1 次元の進行波解 Φ が存在すると仮定する．つまり，Φ と $k>0$ は (2.2) に対応する

$$-k\Phi' - \Phi'' + f(\Phi) = 0, \qquad \Phi(-\infty) = -1, \qquad \Phi(\infty) = 1, \qquad \Phi' > 0$$

をみたすとする．

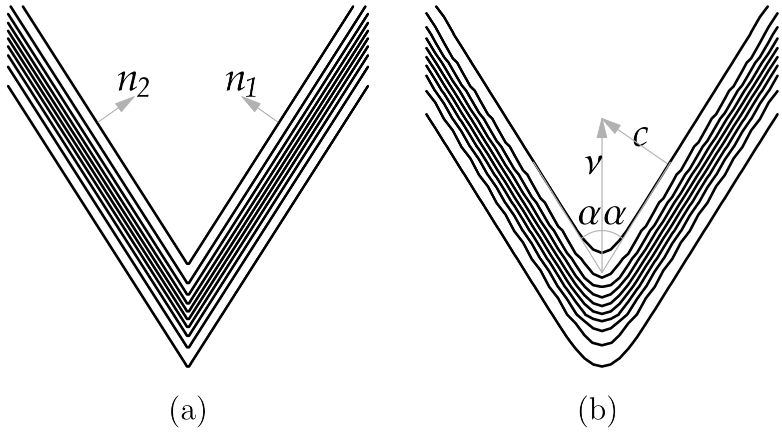


図 1: v^+ の等高線 (a) と２次元空間上の進行波解の等高線 (b)

回転することにより，多次元進行波解の進行方向は x_N 軸として一般性を失わない．$y = x_N$ と x_N 以外の成分 $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ とに分けて，$v(x, y-ct)$ という形で与えられる進行波解を探そう．$z = y - ct$ および $\mathbb{R}^{N-1}$ 上のラプラス作用素

$$\Delta' := \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

と定義すると，進行波解は楕円型方程式

$$-cv_z = \Delta' v + v_{zz} + f(v) \tag{3.2}$$

の解となる．遠方での条件は

$$\lim_{z \to \infty} v(x,z) = 1, \quad \lim_{z \to -\infty} v(x,z) = -1. \tag{3.3}$$

である．１次元の解 $\Phi(z)$ は，(3.2) と (3.3) をみたす解であり，その等高線が超平面になっていることから，平面波解と呼ばれる．ここでは，平面波解以外の進行波解 v と c の存在およびその性質について考えていこう．

まず，２次元平面 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ で考えよう．図 1(a) のように速度 k で，右下側と左下側から単位法線ベクトル $\mathbf{n}_i$ 方向に進む２つの平面波 $\Phi((x,y) \cdot \mathbf{n}_i - kt)$ $(i = 1, 2)$ が角度 2α でぶつかる状況を考える．各々の平面波解は，その法線方向に速度 k で移動するので，y 軸方向には速度 $c = k/\sin\alpha$ で移動することに注意しよう．これから，この２つの平面波は，ぶつかる場所あたりでは相互作用をして変形したとしても，遠方では，y 方向に一定速度 k で移動すると思われるので，図 1(b) のようなＶ字型進行波解が現れることが予想される．より正確には，

$$v^+(x,y) := \min\left\{\Phi\left((x,y)\cdot\mathbf{n}_1 - kt\right), \Phi\left((x,y)\cdot\mathbf{n}_2 - kt\right)\right\} \tag{3.4}$$

とおくと，この関数は2つの平面進行波解の小さい方なので優解になる．この優解より出発する解を考えてみよう．遠方では，等高線が直線なので平面波解と同じように運動するとしてよいであろうから，y 軸方向に c で進む．ここで，速度 c は k より大きいことに注意する．つぎに，“角” の部分に注目してみよう．v^+ の等高線は “角” があるが，拡散項の影響で “角” が取れて丸くなるであろう．等高線の “角” が取れすぎてその部分の等高線の曲率が小さくなり過ぎると平面進行波解の速度 k に近くなるので，優解より遅く動くことになる．一方，“角” がきついとその箇所では曲率の影響でより速度が大きくなる効果をもたらす．こうして “角” の部分の等高線は，時間が経つと少しずつ丸くなるが，あまり平坦になることはなく，適合する適当な形が選択されて図1(b) のようなV字型の進行波解に収束していくと予想される．実際，この考え方で優解・劣解を構成すれば，進行波解の存在が示される．

定理 **3.1 ([26, 27, 43, 44])**．$N \geq 2$ のとき，任意の速度 $c > k$ に対して，(3.2),(3.3) の解 $v(x,z)$ が存在する．

$u = -1$ と $u = 1$ を結ぶ空間1次元の双安定系の進行波解の速度は一意に決まったが，上の結果からわかるように，多次元空間では，V字形の角度に対応して k より大きい任意の速度をもつ進行波解が存在する．

$N = 2$ のときは，Hamel-Monneaux-Roquejoffre [26, 27] および Ninomiya-Taniguchi [43, 44] が証明した．$N \geq 3$ の場合，Hamel-Monneaux-Roquejoffre [26, 27] は進行方向の軸を中心に回転対称な進行波解 $\widetilde{v}(|x|, y - ct)$ の構成に成功している．空間2次元の場合の進行波解の等高面は，直線に漸近する形状であるのに対して進行方向に回転対称な進行波解の等高面は，回転方向の曲率が影響し遠方で直線に漸近することはない．また，Taniguchi [49, 50] が，角錐状の進行波解の構成に成功している．このようなV字型の進行波解は，化学反応 (Belousov-Zhabotinsky 反応) などでも観察される ([40],[14])．類似の結果として，Fife [16], Bonnet-Hamel [7], Hamel-Nadirashvili [28, 29], Hamel-Monneau [24] を挙げておく．

3.1 2次元のV字進行波解の構成

$$u(x,y,t) = w(x, y - ct, t), \qquad z = y - ct.$$

とおくと，方程式は，以下のように変形される．

$$\begin{aligned} &w_t - w_{xx} - w_{zz} - cw_z + f(w) = 0, \qquad (x,z) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0. \\ &w|_{t=0} = u_0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

初期値 $w(x,z,0;u_0) = u_0(x,z)$ をみたす方程式 (3.5) の解を $w(x,z,t;u_0)$ で表すことにする．

$$\mathcal{F}[v] := -v_{xx} - v_{zz} - cv_z + f(v) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2. \tag{3.6}$$

を考えよう．2 つの平面波解 $\Phi(k(z \pm m_* x)/c)$ は (3.6) をみたしている．

$$\begin{aligned} v^+(x,z) &:= \min\left\{\Phi\left(\frac{k}{c}(z - m_* x)\right), \Phi\left(\frac{k}{c}(z + m_* x)\right)\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{k}{c}(z - m_*|x|)\right) \end{aligned}$$

は (3.5) の優解になる．この関数 $v^+(x,z)$ は，z に関して単調増加関数である．

v^+ を初期値とする解を考え，この解が進行波解に収束することを示す．

定理 3.2 (V 字進行波解の存在)． 以下のような (2.1) の進行波解 $u(x,y,t) = v_*(x, y-ct)$ が存在する：

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x^2+z^2>R^2} |v_*(x,z) - v^+(x,z)| = 0,$$
$$v_*(x,z) < v^+(x,z).$$

進行波解 v_* は，無限遠では，0 に収束するような摂動に関して漸近安定である．実際，以下が成り立つ．

定理 3.3 (安定性)． 初期値 $u_0(x,y)$ は

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x^2+y^2>R^2} |u_0(x,y) - v^+(x,y)| = 0, \tag{3.7}$$

をみたすと仮定すると，(2.1) の解 $u(x,y,t;u_0)$ は，

$$\lim_{t\to\infty} \|u(x,y,t;u_0) - v_*(x, y-ct)\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^2)} = 0$$

となる．

この定理から，進行波解の一意性も従うことに注意しておく．

まず，定数

$$\kappa := \frac{1}{2} m_f > 0$$

をとり，$\alpha_1, \alpha_2 \in (-1,1)$ を

$$f'(s) \geq \kappa \qquad (s < \alpha_1,\ s > \alpha_2)$$

となるように選んでおく．$\Phi(z)$ は単調増加なので，定数 A と B を

$$\Phi(-A) = -1 + \frac{\delta_1}{2}, \qquad \Phi(B) = 1 - \frac{\delta_1}{2},$$

ととる．$-A < \mu < B$ では，

$$-1 + \frac{\delta_1}{2} < \Phi(\mu) < 1 - \frac{\delta_1}{2}$$

となる．

まず，φ は $y = m_*|x|$ に指数的に漸近する凸関数とする．すると，Φ は指数的に ± 1 に収束するため，

$$\max\{|\Phi'(\zeta)|, |\Phi''(\zeta)|\} \le K_1 \exp(-\gamma_1|\zeta|) \tag{3.8}$$

をみたす．また，φ も

$$\begin{aligned}
&|\varphi(\xi) - m_*|\xi|| + |\varphi'(\xi) - m_*| + |\varphi''(\xi)| + |\varphi'''(\xi)| \le K_2 \operatorname{sech}(\gamma_2\xi),\\
&K_3 \operatorname{sech}(\gamma_2\xi) \le \frac{c}{\sqrt{1+\varphi'(\xi)^2}} - k \le K_4 \operatorname{sech}(\gamma_2\xi),\\
&m_*|\xi| \le v(\xi),\\
&\mu_- \le \mu(\xi) \le \mu_+
\end{aligned}$$

をみたすような正定数 γ_1, γ_2, K_i $(i = 1, \cdots, 4)$ と $\mu_\pm$ が存在する ([42])．

命題 3.4. $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ および $0 < \alpha \le \alpha_0(\varepsilon)$, に対して

$$v^-(x, z; \varepsilon, \alpha) := \Phi\left(\frac{z - \varphi(\alpha x)/\alpha}{\sqrt{1+\varphi'(\alpha x)^2}}\right) - \varepsilon \operatorname{sech}(\gamma_2 \alpha x)$$

が (2.1) の劣解となるような正定数 ε_0 と $\alpha_0(\varepsilon)$ が存在する．その上，

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x^2+z^2>R^2} |v^+(x,z) - v^-(x,z;\varepsilon,\alpha)| \le 2\varepsilon, \tag{3.9}$$

$$v^-(x,z;\varepsilon,\alpha) < v^+(x,z), \qquad (x,z) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.10}$$

$$(v^-)_z(x,z;\varepsilon,\alpha) > 0, \qquad (x,z) \in \mathbb{R}^2 \tag{3.11}$$

が成り立つ．

命題3.4 と Sattinger の方法 [47] により，進行波解の存在が示される．

3.2 命題 3.4 の証明の概要

$$
\begin{aligned}
\xi &:= \alpha x, \\
\zeta &:= \frac{z-\varphi(\alpha x)/\alpha}{\sqrt{1+\varphi'(\alpha x)^2}}, \\
\sigma(\xi) &:= \varepsilon\,\mathrm{sech}(\gamma_2\xi),
\end{aligned}
$$

とおくと，連鎖律より，

$$
\zeta_x = -\frac{\alpha\varphi'\varphi''}{1+\varphi'^2}\zeta - \frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}}, \tag{3.12}
$$

$$
\zeta_{xx} = -\frac{\alpha^2\varphi''^2+\alpha^2\varphi'\varphi'''}{1+\varphi'^2}\zeta + \frac{3\alpha^2\varphi'^2\varphi''^2}{(1+\varphi'^2)^2}\zeta + \frac{\alpha(\varphi'^2-1)\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{3/2}} \tag{3.13}
$$

となる．これより，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[v^-] &= -\frac{\Phi''(\zeta)}{1+\varphi'(\xi)^2} - (\Phi'(\zeta)\zeta_x)_x - \frac{c\Phi'(\zeta)}{\sqrt{1+\varphi'(\xi)^2}} - f(\Phi(\zeta)-\sigma(\xi)) + \alpha^2\sigma''(\xi) \\
&= \left(1-\frac{1}{1+\varphi'(\xi)^2}-\zeta_x^2\right)\Phi''(\zeta) - \zeta_{xx}\Phi'(\zeta) + \left(k-\frac{c}{\sqrt{1+\varphi'(\xi)^2}}\right)\Phi'(\zeta) \\
&\quad +f(\Phi(\zeta)) - f(\Phi(\zeta)-\sigma(\xi)) + \alpha^2\sigma''(\xi) \\
&= I_1+I_2+I_3+I_4
\end{aligned}
$$

と計算できる．ここで

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= \left(1-\frac{1}{1+\varphi'(\xi)^2}-\zeta_x^2\right)\Phi''(\zeta), \\
I_2 &:= -\zeta_{xx}\Phi'(\zeta), \\
I_3 &:= -\left(\frac{c}{\sqrt{1+\varphi'^2}}-k\right)\Phi'(\zeta), \\
I_4 &:= -f(\Phi-\sigma)+f(\Phi)+\alpha^2\sigma''
\end{aligned}
$$

とした．(3.12) および (3.13) より，

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\alpha\left\{\left(\frac{\varphi'\varphi''}{1+\varphi'^2}\right)^2\alpha\zeta^2 + \frac{2\varphi'^2\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{3/2}}\zeta\right\}\Phi''(\zeta), \\
I_2 &= -\alpha\left\{-\frac{\varphi''^2+\varphi'\varphi'''}{1+\varphi'^2}\alpha\zeta + \frac{3\varphi'^2\varphi''^2}{(1+\varphi'^2)^2}\alpha\zeta + \frac{(\varphi'^2-1)\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{3/2}}\right\}\Phi'(\zeta)
\end{aligned}
$$

なので，$0 < \alpha \le 1$ に対して，

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\le K_5 \alpha \operatorname{sech}(\gamma_2 \xi), \\
|I_2| &\le K_6 \alpha \operatorname{sech}(\gamma_2 \xi), \\
I_3 &\le -K_3 \Phi'(\zeta) \operatorname{sech}(\gamma_2 \xi) < 0,
\end{aligned}
$$

が成り立つことがわかる．Φ' は $|\zeta|$ が大きいとき 0 に近づくが，そのときは，I_4 が他の項を抑えてくれる．こうして， v^- は劣解となる．また，$v^+ - v^-$ を評価することにより (3.10) も示すことができる． □

この命題を用いて進行波解の一意性や大域的な漸近安定性も示すことができる．

つぎに，回転対称な進行波解があるとき，その等高面がどうなるか考えてみよう．あるリプシッツ連続な関数 $\gamma(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ があって，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty} \sup_{z-\gamma(x)<-R} v(x,z) = -1, \\
&\lim_{R\to\infty} \inf_{z-\gamma(x)>R} v(x,z) = 1
\end{aligned}
$$

となる速度 c の進行波解 v が存在するとしよう．このとき，最大値の原理より，

$$-1 \le v \le 1, \quad v_z > 0$$

が従う．さらに $\lambda \in (0,1)$ のとき，$\Gamma_\lambda := \{(x,z) | v(x,z) = \lambda\}$ 上では，

$$\inf_{\Gamma_\lambda} |v_z| > 0$$

である．こうして，

$$\lim_{|x|\to\infty} \left| \frac{x}{|x|} \cdot \nabla \gamma(x) \right| = \cot \alpha = \frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{c}$$

が導かれる ([26])．これは，速度 c によって進行波解の形状 φ の等高面の漸近的な傾きが決まることを意味している．また，この収束は $N = 2$ のときは指数的であるが，$N \ge 3$ のときは $1/|x|$ に比例し，漸近線をもたないことに注意しておく ([27])．

この角度 α によってその進行波の形状にどう変化するのかも興味深い問題である．$\alpha < \pi/2$ では，上で見たように速度 c の進行波解になる．$\alpha = \pi/2$ では等高面はフラットになり 1 次元の進行波解に帰着される．$\alpha > \pi/2$ になると，曲率は速度を抑える方向に働くため等高面はどんどん平らになり，等高線は，自己相似的に拡大する円弧のように振る舞う．このような解については，文献 Deckelnick-Elliott-Richardson [14]，Hamel-Nadirashivili [29] を参照してほしい．また，α が $\pi/2$ より小さいが十分近いときに，摂動によって生じる挙動を分岐理論を用いて調べた研究 [30] もある．

4　均衡時の多次元進行波解

前節で扱った Allen-Cahn 方程式では，正の速度で伝播する平面進行波解が存在するので，非均衡な場合と呼ばれる．この場合には，2 つの平面進行波解を用いて，多次元進行波解の構成が可能となった．均衡しているとき，つまり

$$\int_{-1}^{1} f(u)du = 0$$

が成り立つときは，(3.1) の定数解 $u = -1$ と $u = 1$ の引き込み領域はバランスし，(3.1) の平面進行波解の速度は 0 になる．つまり定常解になっている．そのため，前節のような方法では進行波解を構成は期待できない．しかし，この場合にも 2 次元以上の空間では任意の正の速度をもつ進行波解が存在する．

定理 4.1 ([12]). 均衡している場合でも $N \geq 2$ のとき，任意の正の速度 c に対して (3.2),(3.3) の解 v_* が存在する．

このような解の存在証明に (4.1) を用いて，定常解を進行波解にする．つまり，任意の ε に対して

$$-\varepsilon u_z = \Delta u - f(u) + \varepsilon\sqrt{2F(u)} \tag{4.1}$$

には，平面進行波解が存在する．そこで，定理 3.1 の適用すると，任意の速度 c の V 字型進行波解 v_ε が存在する．$v_\varepsilon(0) = 1/3$ となるように v_ε を平行移動しておくと，集合 $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は，楕円型方程式の Schauder 評価より，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき収束するような部分列がとれ，収束先 v_* が，(3.1) の進行波解となることが示される（$v_*(0) = 1/3$ なので，これは自明な解ではない）．優解・劣解をうまく構成することによって遠方での条件を確かめることができる．さらに，この進行波解の幾何学的形状について以下のようなことがわかっている．

定理 4.2 ([12]). $N \geq 2$ とする．定理 4.1 で構成した速度 c の進行波解を v_* とする．

$$\Gamma = \left\{ (x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;\middle|\; v_*(x,z) = 0 \right\}$$

とおくと，

(i) $N > 2$ のとき，Γ は，漸近的には以下のよう放物面に近づく:

$$\lim_{z\to\infty,\ (x,z)\in\Gamma} \frac{|x|^2}{2z} = \frac{n-1}{c}.$$

(ii) $N = 2$ のとき，ある正の定数 A が存在して以下をみたす．

$$\lim_{z\to\infty,\ (x,z)\in\Gamma} \frac{\cosh(2\sqrt{f'(1)}\ x)}{\sqrt{f'(1)}\ z} = \frac{A}{c}.$$

この進行波解の一意性は大変興味深い問題である．実際，$c = 0$ のときは，次の De Giorgi の予想と関係が深い．

De Giorgi の予想：$N \leq 8$ のとき，$|u| \leq 1$ をみたす方程式

$$\Delta u + u - u^3 = 0$$

の x_N に関して単調減少な解 u の等高面は超平面となる．

この予想に条件 (3.3) を加えた問題も議論されている ([22])．$c \neq 0$ では (3.3) を加えてもこの予想は正しくなく，$c = 0$ という条件が本質的であることを定理 4.2 は意味している．なお，最新の結果として，De Giorgi の予想は Savin [48] により肯定的に解かれた．

ところで，この予想の中で空間次元に関する仮定があるのは，$N \geq 9$ の場合には，超平面以外にも $\mathbb{R}^N$ 上グラフで表される極小曲面が存在することに起因している ([6])．$N \geq 9$ の場合も，[13] によって研究されている．

最後に，多次元の進行波解の研究としてシリンダー領域での進行波解については，Gardner [21]，Berestycki-Nirenberg [5]，Heinze-Papanicolaou-Stevens[31] などを参照してほしい．

多次元の反応拡散方程式の解の挙動は，ある極限をとると界面の運動方程式に帰着される場合が多い．上述の問題も平均曲率流と関係し，また前節の場合は外力をもつ平均曲率流と関係が深い．外力をもつ平均曲率流の運動として，[14, 42] を，界面進行波解の安定性の論文として [41] を挙げておく．

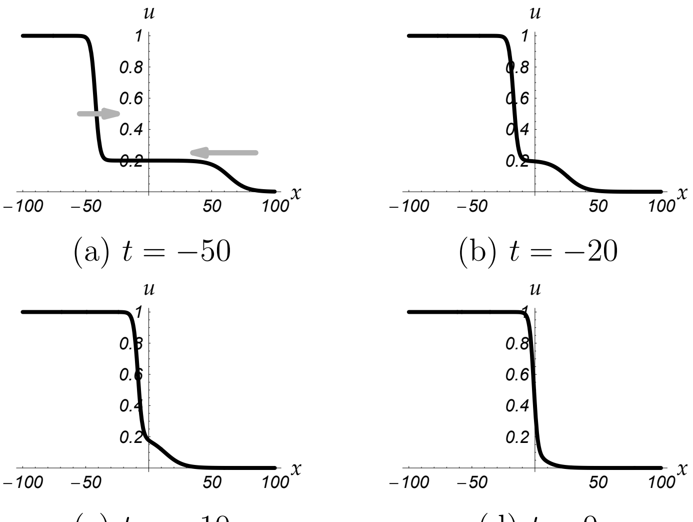
最後に，Allen-Cahn 方程式の平面波でない進行波解として，不均衡な場合に存在する定常解と安定な状態をつなぐ進行波解の研究もされていることを付け加えておく ([39])．

5 全域解

進行波解は，反応拡散方程式の解の挙動を表現する重要な解であるが，これだけではダイナミクスを理解するには不十分である．ここでは，§1 で述べたような進行波解を拡張した概念である全域解を考えていく．全域解（**entire solution**）とは，反応拡散系の古典解で全ての $t \in \mathbb{R}$ に対して定義される解のことである．楕円型方程式で用いられた言葉を，Hamel-Nadirashvili らが，[28] で放物型方程式に関して最初に用いたように思われる．平衡解や進行波解はもちろん全域解であるが，それ以外にどのくらいあるのか興味深い問題である．

熱方程式の場合，全域解は簡単に構成できたが，Allen-Cahn 方程式に関してそう簡単にはできない．Kawahara-Tanaka[35] によって $f(u) = u(u-1)(u-a)$ のとき Allen-Cahn 方程式の厳密解がつぎのように発見されている．

$$\Psi(x,t) = \frac{1 + a \exp\{(1-a)x/\sqrt{2} - (1-a^2)t/2\}}{1 + \exp\{x/\sqrt{2} - (1/2-a)t\} + \exp\{(1-a)x/\sqrt{2} - (1-a^2)t/2\}} \tag{5.1}$$



(a) $t=-50$　(b) $t=-20$　(c) $t=-10$　(d) $t=0$

図 1: $a=0.2$ のときの Allen-Cahn 方程式の厳密解 (5.1) の時間的変化．２つのフロント進行波の合併と新しい進行波の生成が見てとれる．

この形は，Allen-Cahn 方程式の厳密進行波解と似ているが，少し異なっている．解の形状は，図１のように，$t\to-\infty$ のとき，２つの進行波解がつながったような形で，時間が大きくなると，１つの進行波解に合体していく．

１次元空間上の Allen-Cahn 方程式

$$u_t=u_{xx}-f(u)\qquad(x\in\mathbb{R})\tag{5.2}$$

を考えよう．この方程式の $u=1$ と $u=0$ を結ぶ進行波解 $\phi=\phi(z;c)$ を考える．つまり，$\alpha=1,\omega=0$ として，

$$\phi''+c\phi'-f(\phi)=0,\quad -\infty<z<\infty,\qquad \phi(-\infty)=\alpha,\quad \phi(\infty)=\omega.\tag{5.3}$$

をみたす．$f(u)$ が単安定のとき，つまり，

$$f(0)=f(1)=0,\qquad f(u)<0\ \ (0<u<1),\quad f'(0)f'(1)\neq 0$$

をみたすとき，最小速度 $c_m>0$ が存在して，進行波解の族 $\{\phi(\cdot;c)\}_{c\geq c_m}$ が存在する．それぞれ速度 $c_1,c_2\geq c_m$ をもつ２つの進行波解

$$\phi_1(x-c_1t):=\phi(x-c_1t;c_1),\qquad \phi_2(x+c_2t):=\phi(-x-c_2t;c_2)$$

を考える．ϕ_1 は x について単調減少で，x 方向に進んでいる．一方，ϕ_2 は単調増加な関数で x の負の方向に進んでいる．そのため，ϕ_1 が $x=-\infty$ から，ϕ_2 が $x=\infty$ から向

かってきて，2 つの進行波解がぶつかり，1 に収束するような全域解が存在する．つまり，任意の $c_1, c_2 \geq c_m$ に対して

$$\lim_{t\to-\infty}\{\sup_{x\leq 0}|U(x,t)-\phi_1(x-c_1t)|+\sup_{x\geq 0}|U(x,t)-\phi_2(x+c_2t)|\}=0,$$
$$\lim_{t\to\infty}|U(x,t)-1|=0$$

をみたす全域解 $U(x,t)$ が存在する．このような全域解は

$$\underline{U}(x,t):=\sup\{\phi_1(x-c_1t),\phi_2(x+c_2t)\}$$

を劣解とすることで [28] で初めて証明された．$t=-n$ でのこの関数を初期条件にする (5.2) の解の列 $\{U_n\}$ を構成する．さらに，f に関して

$$f'(0)<f'(u)\quad (0<u<1) \tag{5.4}$$

を仮定することで，この列を上から評価し，その収束先の関数が求める挙動をする全域解であることを証明している．しかし，彼らの議論は (5.4) を用いているので，(5.4) をみたさない Allen-Cahn 方程式 (1.4) のような双安定の場合には直接適用できない．双安定の場合の全域解については Yagisita [54] によって示された．進行波解軌道の法線方向の双曲安定性を用いて，２つの進行波解の動きを表現する解を構成することで証明した．彼の方法は，双曲安定性が成り立つような双安定なシステムの場合にも拡張できる利点がある．２つの進行波解やパルス解を十分引き離したときに起こる相互作用を縮約する [15] などの研究を応用したものと考えることもできる．一方で Fisher-KPP 方程式のような単安定の場合には進行波解が族で現れるので双曲安定性が成り立たず適用できない．

Fukao-Morita-Ninomiya[20] では，Allen-Cahn 方程式の厳密進行波解を利用して，劣解・優解をうまく構成し，全域解を構成した．このアイデアは [23, 10, 11] で発展した．Guo-Morita[23] では，単安定，双安定の両方に対して統一した方法で証明できることが示し，[28] で扱えなかった最小速度との組み合わせに対しても，全域解の存在を示し，Chen-Guo[10] では，広いクラスでの一意性が示されている．

以下では，Allen-Cahn 方程式 (1.4) の全域解について考える．$f(u)=u(u-1)(u-a)$ $(0<a<1/2)$ を仮定する．これは，双安定形であるが，$0\leq u\leq a$ および $a\leq u\leq 1$ に方程式を制限すると，単安定な方程式とみなすこともできる．従って，安定な平衡点 $u=0$ と不安定な平衡点 $u=a$ および $u=1$ と $u=a$ を結ぶ進行波解の族が存在する．$t\approx-\infty$ のとき，２つの進行波解の波面間の距離が十分離れていて，それぞれがほぼ独立に振舞うような２つの進行波解の組み合わせを考えよう．$\phi_j=\phi_j(x-c_jt)$ $(j=1,2)$ を

$$\begin{cases}\phi_j''(z)+c_j\phi_j'(z)-f(\phi_j(z))=0, & z\in\mathbb{R}\\ \phi_j(-\infty)=\alpha_j, \quad \phi_j(\infty)=\omega_j\end{cases}\quad (j=1,2), \tag{5.5}$$

の解として得られる (5.2) の進行波解とする．$t \approx -\infty$ のとき ϕ_1 の波面は ϕ_2 の左にくるように設定し，２つの進行波解が連続的につながる条件

$$\omega_1 = \alpha_2.$$

を仮定して，

$$(\alpha_1, \omega_1, \alpha_2, \omega_2) = (1, 0, 0, 1), (1, a, a, 1), (0, a, a, 0), (1, a, a, 0), (1, 0, 0, a) \tag{5.6}$$

の場合を考えよう．(5.6) の最初の３つは衝突・消滅の場合に相当し，残りの２つの進行波解が合体する場合に相当する．[38] の研究によって，これらの全域解を統一的に扱えるようになった．

定理 5.1. (5.5) の任意の解の組 $(\phi_j(z), c_j)$ $(j = 1, 2)$ について，

$$(\alpha_1, \omega_1, \alpha_2, \omega_2) = (1, 0, 0, 1), (1, a, a, 1), (0, a, a, 0), (1, a, a, 0)$$

のいずれの場合にも次の漸近挙動をする全域解 $U(x, t)$ が存在する．

$$\lim_{t \to -\infty} \{\sup_{x \le 0} |U(x, t) - \phi_1(x - c_1 t)| + \sup_{x \ge 0} |U(x, t) - \phi_2(x - c_2 t)|\} = 0.$$

また，$(\alpha_1, \omega_1, \alpha_2, \omega_2) = (1, 0, 0, a)$ の場合は, $c_1 > c_2$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{t \to -\infty} \{ &\sup_{x \le (c_1 + c_2)t/2} |W(x, t) - \phi_1(x - c_1 t)| \\ &+ \sup_{x \ge (c_1 + c_2)t/2} |W(x, t) - \phi_2(x - c_2 t)|\} = 0 \end{aligned}$$

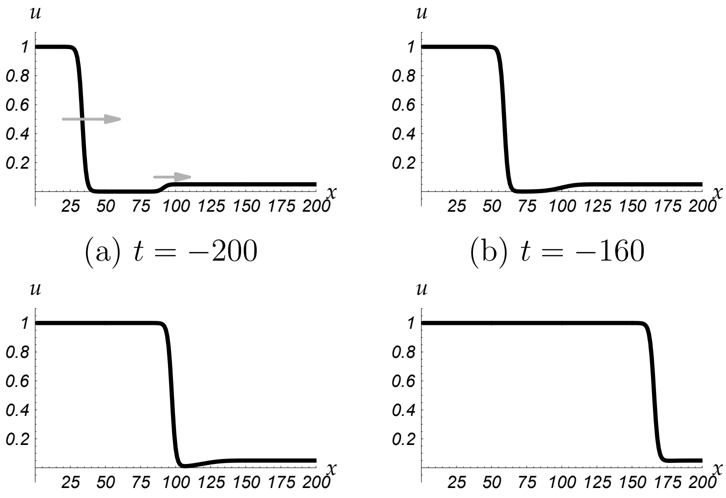
を満たす全域解 $W(x, t)$ が存在する．

$U(x, t)$ は，Kawahara-Tanaka の全域解に対応するものであるが，進行波解の速度に関する条件は必要ない．$W(x, t)$ の場合は，大きな進行波解が小さな進行波解に追いつき飲み込むような全域解になっている（図２参照）．定理の全域解の構成には，これまでの波面の位置（位相）に関する情報だけでなく，振幅に関する情報も変更する必要がある．そこで，全域解を

$$U(x, t) = Q(\phi_1(x - p_1(t)), \phi_2(x - p_2(t)))$$

とおく．$t \approx -\infty$ では $p_1(t), p_2(t)$ は，それぞれ $c_1 t, c_2 t$ と同じような挙動をする関数を優解・劣解となるように構成する．

$$\begin{aligned} D &:= D_c \setminus \{(\alpha_1, \omega_2)\}, \\ D_c &:= \Big[\min\{\alpha_1, \omega_1\},\ \max\{\alpha_1, \omega_1\}\Big] \times \Big[\min\{\alpha_2, \omega_2\},\ \max\{\alpha_2, \omega_2\}\Big] \subset \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$



(a) $t = -200$　(b) $t = -160$

(c) $t = -100$　(d) $t = 0$

図 2: $a = 0.05$ の場合の数値計算．定理 5.1 の条件 $c_1 > c_2$ が成り立つように a を用いている．

とおいて，関数 Q は，

$$Q(y, z) = \begin{cases} y + (y - \alpha_1)(z - \alpha_2)R_1(y, z), \\ z + (y - \omega_1)(z - \omega_2)R_2(y, z), \end{cases} \qquad (y, z) \in D, \tag{5.7}$$

となるようにとる．ここで，$R_1, R_2 \in C^1(D)$ とする．このような関数 Q が存在すれば，全域解となることが示される (詳しくは，[38] 参照)．

A　補足

ここでは，Protter–Weinberger [45] から最大値の原理を紹介しよう．

$$L[u] := -\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{A.1}$$

とおく．ここで，$a_{i,j}, b_i$ は，$\mathbb{R}^N$ の領域 D 上で一様有界な連続関数で，

$$\mu|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu^{-1}|\xi|^2$$

となる正定数 μ が存在すると仮定する．

A.1 楕円型方程式の最大値の原理

L に関して，以下の定理が成り立つ．

定理 A.1 (楕円型方程式の最大値の原理)．有界領域 D 上で $u \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$ が，

$$L[u] + h(x)u \leq 0$$

をみたすとする．

(i) $h(x) \equiv 0$ のとき，$\max_{x \in D} u = \max_{x \in \partial D} u$

(ii) $h(x) \geq 0$ のとき，∂D 上 $u \leq 0$ なら，D 上で $u \leq 0$

最大値の原理から解の一意性もわかる．実際，D で

$$-\Delta u = 0,$$

および ∂D で $u = 0$ をみたす関数 u を考えよう．D が有界領域のときは，最大値の原理が成り立つので，$u \geq 0$ となる．また，$v = -u$ も同じ方程式をみたすので，$-u \geq 0$ となり，$u \equiv 0$ が得られる．

条件 $h \geq 0$ は，本質的である．例えば，

$$-\Delta u - u = 0, \quad (-\pi < x < \pi), \quad u(\pm\pi) = 0$$

に最大値の原理が適用できるなら，

$$u \leq 0 \quad (-\pi < x < \pi)$$

となるが，この楕円型方程式の解として，

$$u(x) = \sin x$$

があり，$(0, \pi)$ で正となり，最大値の原理をみたしていない．

一方，領域が非有界の場合には，最大値の原理が成り立たない例を作ることができる．例えば，$u = \sin x \cosh y$ とおくと，$D = (0, \pi) \times \mathbb{R}$ 上では

$$-\Delta u = 0$$

および，∂D 上では $u = 0$ をみたしているが，D 上で $u > 0$ となる．つまり，最大値の原理は成り立っていない．非有界領域上での最大値の原理には，遠方ので挙動に条件が必要となる．

定理 A.2 (Phragmèn-Lindelöf の原理)． D を非有界領域とし，D 上で $h(x) \geq 0$ とする．さらに

$$L[\phi] + h(x)\phi \geq 0, \qquad \lim_{|x|\to\infty, x\in D} \phi(x) = \infty$$

をみたす正値関数 ϕ が存在すると仮定する．$u \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$ が，D 上で

$$L[u] + h(x)u \leq 0, \qquad \liminf_{A\to\infty} \sup_{\phi(x)=A, x\in D} \frac{u(x)}{\phi(x)} \leq 0$$

をみたすとき，∂D 上 $u \leq 0$ なら，$u \leq 0$ が成り立つ．

[証明] u は有界なので，$M := \max_{x\in D} |u|$ とする．$D_A := \{x \in D \mid \phi(x) < A\}$ および

$$v := u - \frac{M}{A}\phi(x)$$

を考える．境界 ∂D_A で $v \leq 0$ をみたし，D_A 上で

$$L[v] + h(x)v \leq 0$$

も得られる．D_A は有界領域なので，定理 A.1 を用いると D_A で $v \leq 0$，つまり，$u \leq M\phi/A$ が従う．$x \in D$ に対して，十分大きな A をとると，$x \in D_A$ かつ

$$u(x) \leq \frac{M}{A}\phi(x)$$

をみたすので，$A \to \infty$ とすることにより，D 上 $u \leq 0$ が従う．□

これより，$D = \mathbb{R}^n$ のとき，有界な解に関しては，最大値の原理が適用できることがわかる．

補題 A.3. 有界領域 B_R 上で定数でない関数 $u \in C^2(B_R)$ が，

$$L[u] + h(x)u \leq 0$$

をみたし，B_R 上 $u(x) < 0$，$u(x_0) = 0$ となる $x_0 \in \partial B_R$ が存在するとすると，

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

となる．ここで ν は B_R の外向き法線ベクトルである．

条件より

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$$

は明らかに従うので，等号がとれることが重要なポイントである．これを用いると強最大値の原理を示すことができる．

定理 A.4 (楕円型方程式の強最大値の原理)．有界領域 D 上で $u \in C^2(D)$ が，

$$L[u] + h(x)u \leq 0$$

をみたし，定数関数でないとする．

(i) $h(x) \equiv 0$ のとき，u は D の内部で最大値をとらない．境界でのみ最大値をとる．

(ii) $h(x) \geq 0$ のとき，∂D 上 $u \leq 0$ なら，D 内では $u < 0$ となる．

つぎに放物型方程式の最大値の原理を思い出しておく．$Q_T := D \times (0,T), \Gamma := D \times \{t = 0\} \cup \partial D \times [0,T]$ と表すことにする．係数は t にも依存してよく，Q_T で有界と仮定する．

定理 A.5 (放物型方程式の最大値の原理)．関数 $u \in C^{2;1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ が Q_T 上で

$$u_t + L[u] + h(x,t)u \leq 0$$

をみたすとする．Γ 上 $u \leq 0$ なら，Q_T 上で $u \leq 0$ が成り立つ．

D が非有界のとき，以下のような定理が成り立つ．

定理 A.6 (最大値の原理)．関数 $u \in C^{2;1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ が Q_T 上で

$$u_t + L[u] + h(x,t)u \leq 0$$

をみたすとする．ある正数 c があって

$$\liminf_{R \to \infty} e^{-cR^2} \left(\max_{|x|=R, 0 \leq t \leq T, x \in D} u(x,t) \right) \leq 0$$

が成り立つと仮定する．このとき，Γ 上 $u \leq 0$ なら，Q_T 上で $u \leq 0$ が成り立つ．

A.2 最大値の原理の応用

A.2.1 優解・劣解

L を (A.1) で与えたものとし，その係数は Ω 上有界とする．

$$L[\overline{U}] + f(\overline{U}) \geq 0 \quad (x \in \Omega), \qquad \overline{U} \geq 0 \quad (x \in \partial\Omega)$$

のとき，優解といい，

$$L[\underline{U}] + f(\underline{U}) \leq 0 \quad (x \in \Omega), \qquad \underline{U} \leq 0 \quad (x \in \partial\Omega)$$

のとき，劣解と呼ばれる．また，$\gamma(x)$ を十分大きく取って

$$\gamma > \max_{|u| \leq M} |f_u(u)|$$

ととり，$L + \gamma$ が逆をもつようにしておく．

補題 **A.7 (Sattinger [47])**. 優解 $\overline{U}$ と劣解 $\underline{U}$ が

$$\underline{U}(x) \leq \overline{U}(x) \quad (x \in \Omega)$$

をみたすと仮定する．

$$\begin{aligned} L[U] &= -f(U) & \text{(A.2)} \\ U(x) &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega & \text{(A.3)} \end{aligned}$$

の解である．さらに，

$$\underline{U}(x) \leq U(x) \leq \overline{U}(x)$$

が成り立つ．

[証明]　以下のような関数列 $\{u_n(x)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ を考える．

$$\begin{aligned} L[u_n] + \gamma u_n &= -f(u_{n-1}) + \gamma u_{n-1}, \\ u_n(x) &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \\ u_0 &= \underline{U}. \end{aligned}$$

まず，

$$\underline{U} < u_1 < \cdots < u_n < u_{n+1} < \cdots < \overline{U}.$$

をみたすことを示そう．

$$\begin{aligned} L[u_0 - u_1] + \gamma(u_0 - u_1) &= L[u_0] + \gamma u_0 + f(u_0) - \gamma u_0 \leq 0 \\ u_0(x) - u_1(x) &\leq 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

に最大値の原理を用いることにより，

$$u_0 \leq u_1$$

が成り立つ．平均値の定理より，

$$\begin{aligned} L[u_n - u_{n+1}] &= \{-f'(\theta u_{n-1} + (1-\theta)u_n) + \gamma\}(u_{n-1} - u_n), \\ u_n(x) - u_{n+1}(x) &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

となる θ が存在する．最大値の原理を帰納的に用いることにより $u_n - u_{n+1} \leq 0$ が示される．$u_n(x)$ は単調増大列である．

一方，

$$\begin{aligned} L[u_n - \overline{U}] + \gamma(u_n - \overline{U}) &= L[u_n] + \gamma u_n - L[\overline{U}] - \gamma\overline{U} \\ &\leq -f(u_{n-1}) + \gamma u_{n-1} + f(\overline{U}) - \gamma\overline{U} \\ &\leq \left\{-f'(\theta u_{n-1} + (1-\theta)\overline{U}) + \gamma\right\}(u_{n-1} - \overline{U}) \end{aligned}$$

および境界条件

$$u_n(x) - \overline{U}(x) \leq 0 \qquad \text{on } \partial\Omega,$$

より，帰納的に

$$u_n \leq \overline{U}$$

が成り立つことがわかる．従って，極限関数

$$U(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

が存在する．

Schauder 評価を用いることにより，極限関数 $U(x)$ は滑らかであり，(A.2)–(A.3) をみたすことが従う． $\square$

その他の応用として，交点非増大の性質や Gidas-Ni-Nirenberg などの結果が有名である．

参考文献

[1] S. Allen and J.W. Cahn, *A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening*, Acta. Metall. **27** (1979), pp. 1084-1095.

[2] D. G. Aronson and H. F. Weinberger, *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation*, Partial Differential Equations and Related Topics, ed. J. A. Goldstein, Lecture Notes in Math. **446** (1975), 5–49.

[3] **D. G. Aronson and H. F. Weinberger**, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv. Math. **30** (1978), 33–76.

[4] H. Berestycki, F. Hamel and N. Nadirashvili, *The speed of propagation for KPP type problems I: Periodic framework*, J. Eur. Math. Soc. **7** (2005), 173–213.

[5] H. Berestycki and L. Nirenberg, *Travelling fronts in cylinders*, Ann. Inst. Henri Poincare **5** (1992), 497–572.

[6] E. Bombieri, E. De Giorgi and E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243–268.

[7] A. Bonnet and F. Hamel, *Existence of nonplanar solutions of a simple model of premixed Bunsen flames*, SIAM J. Math. Anal. **31** (1999), pp. 80-118.

[8] M. Bramson, *Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to traveling waves*, Mem. Amer. Math. Soc. **44** (1983), no. 285.

[9] **X. Chen**, *Existence, uniqueness, and asymptotic stability of traveling waves in nonlocal evolution equations*, Adv. Differential Equations **2** (1997), 125–160.

[10] X. Chen and J. -S. Guo, *Existence and uniqueness of entire solutions for a reaction-diffusion equation*, J. Differential Equations **212** (2005), 62–84.

[11] X. Chen, J. -S. Guo and H. Ninomiya, *Entire solutions of a balanced bistable dynamics*, to appear in Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.

[12] X.F. Chen, J.S. Guo, F. Hamel, H. Ninomiya, and J.M. Roquejoffre, *Traveling Waves with Paraboloid Like Interfaces for Balanced Bistable Dynamics*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire **24** (2007), 369-393

[13] M. Del Pino, M. Kowalczyk, and J. Wei, *On De Giorgi conjecture in dimension* $N \geq 9$, preprint

[14] K. Deckelnick, C. M. Elliott, and G. Richardson, *Long time asymptotics for forced curvature flow with applications to the motion of a superconducting vortex*, Nonlinearity **10** (1997), 655–678.

[15] S. Ei, *The motion of weakly interacting pulses in reaction-diffusion systems*, J. Dynam. Differential Equations **14** (2002), 85–137.

[16] P. C. Fife, Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces (CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. 53), SIAM (1988).

[17] **P. C. Fife and J. B. McLeod**, *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **65** (1977), 335–361.

[18] P. C. Fife and J. B. McLeod, *A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion*, Arch. Ration. Mech. Anal. **75** (1980/81), 281–384.

[19] R. A. Fisher, *The wave of advance of advantageous genes*, Ann. Eugenics **7** (1937), 355–369.

[20] Y. Fukao, Y. Morita, and H. Ninomiya, *Some entire solutions of the Allen-Cahn equation*, Taiwanese J. Math. **8** (2004), 15–32.

[21] R. Gardner *Existence of multidimensional traveling wave solutions of an initial-boundary value problem* J. Differential Equations **61** (1986), 335–379.

[22] N. Ghoussoub and C. Gui, *On a conjecture of De Giorgi and some related problems*, Math. Ann. **311** (1998), 481–491.

[23] J.-S. Guo and Y. Morita, *Entire solutions of reaction-diffusion equations and an application to discrete diffusive equations*, Disc. Cont. Dyn. Systems **12** (2005), 193–212.

[24] F. Hamel and R. Monneau, *Solutions of semilinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$ *with conical-shaped level sets*, Comm. Partial Diff. Equations **25** (2000), 769–819.

[25] F. Hamel and R. Monneau, *Existence and uniqueness for a free boundary problem arising in combustion theory*, Interfaces Free Boundaries **4** (2002), 167–210.

[26] F. Hamel, R. Monneau, and J.-M. Roquejoffre, *Existence and qualitative properties of multidimensional conical bistable fronts*, Disc. Cont. Dyn. Systems **13** (2005), 1069–1096.

[27] F. Hamel, R. Monneau, and J.-M. Roquejoffre, *Asymptotic properties and classification of bistable fronts with Lipschitz level sets*, Disc. Cont. Dyn. Systems **14** (2006), 75–92.

[28] F. Hamel and N. Nadirashvili, *Entire solutions of the KPP equation*, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), 1255–1276.

[29] F. Hamel and N. Nadirashvili, *Travelling fronts and entire solutions of the Fisher-KPP equation in* $\mathbb{R}^N$, Arch. Ration. Mech. Anal. **157** (2001), 91–163.

[30] M. Haragus and A. Scheel, *Corner defects in almost planar interface propagation.* Ann. Inst. H. Poincare' Anal. Non Line'aire **23** (2006), 283–329.

[31] S. Heinze, G. Papanicolaou and A. Stevens, *Variational principles for propagation speeds in inhomogeneous media* SIAM J. Appl. Math. **62** (2001), 129–148.

[32] K.P. Hadeler and F. Rothe, *Traveling fronts in nonlinear diffusion equations*, J. Math. Biol., **2** (1975), 251–263.

[33] Ya. I. Kanel, *The behavior of solutions of the Cauchy problem when the time tends to infinity, in the case of quasilinear equations arising in the theory of combustion*, Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 533–536.

[34] Ya. I. Kanel, *Some problems involving burning-theory equations*, Soviet Math. Dokl. **2**(1961), 48–51.

[35] T. Kawahara and M. Tanaka, *Interactions of traveling fronts: An exact solutions of a nonlinear diffusion equations*, Physics Letters. **97A** (1983), 311–314.

[36] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piskunov, *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Bjul. Moskowskogo Gos. Univ. Ser. Internat. Sec. A **1** (1937), 1–26. *Study of the diffusion with growth of the quantity of matter and its application to a biology problem*, in "Dynamics of curved fronts", ed. Pierre Pelcé, Academic Press, Boston (1988) 105–130

[37] H. Matano, K.I. Nakamura and B. Lou, *Periodic traveling waves in a two-dimensional cylinder with saw-toothed boundary and their homogenization limit*, Networks and Heterogeneous Media **1** (2006), 537–568.

[38] Y. Morita and H. Ninomiya, *Entire solutions with merging fronts to reaction-diffusion equations*, J. Dynam. Differential Equations **18** (2006), 841–861

[39] Y. Morita and H. Ninomiya, Monotone-type traveling waves of bistable reaction-diffusion equations in the multi-dimensional space, Bulletin of the Institute of Mathematics. **3** (2008) 567–584

[40] V. Pérez-Muñuzuri, M. Gómez-Gesteira, A.P. Muñuzuri, V.A. Davydov, and V. Pérez-Villar, V-shaped stable nonspiral patterns, Physical Review E **51-2** (1995), 845–847.

[41] M. Nara and M. Taniguchi, *Stability of a traveling wave in curvature flows for spatially non-decaying initial perturbations*, Disc. Cont. Dyn. Systems **14** (2006), 203–220.

[42] H. Ninomiya and M. Taniguchi, *Stability of traveling curved fronts in a curvature flow with driving force*, Methods and Application of Analysis **8** (2001), 429–450.

[43] H. Ninomiya and M. Taniguchi, *Existence and global stability of traveling curved fronts in the Allen-Cahn equations,* J. Differential Equations **213** (2005), 204–233.

[44] H. Ninomiya and M. Taniguchi, *Global stability of traveling curved fronts in the Allen-Cahn equations,* Disc. Cont. Dyn. Systems, **15** (2006), 819–832.

[45] **M. H. Protter and H. F. Weinberger**, Maximum Principles in Differential Equations, (1984) Springer-Verlag.

[46] N. Shigesada and K. Kawasaki, Biological Invasions: Theory and Practice, Oxford Series in Ecology and Evolution, Oxford Univ. Press., Oxford (1997).

[47] **D. H. Sattinger**, *On the stability of waves of nonlinear parabolic systems*, Adv. Math. **22** (1976), 312–355.

[48] O. Savin, *Regularity of at level sets in phase transitions*, Annals of Mathematics, **169** (2009), 41–78.

[49] M. Taniguchi, *Traveling fronts of pyramidal shapes in the Allen-Cahn equations*, SIAM J. Math. Anal. **39** (2007), 319–344.

[50] M. Taniguchi, *The uniqueness and asymptotic stability of pyramidal traveling fronts in the Allen.Cahn equations*, J. Differential Equations **246** (2009), 2103–2130.

[51] A. I. Volpert, V. A. Volpert, V. A. Volpert, Traveling wave solutions of parabolic systems, American Mathematical Society Providence, RI, 1994.

[52] H. F. Weinberger, *Long time behavior of a class of biological models*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1978), 353–396.

[53] **J. Xin**, *Front propagation in heterogeneous media*, SIAM Rev. **42** (2000), 161–230.

[54] H. Yagisita, *Backward global solutions characterizing annihilation dynamics of travelling fronts*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **39** (2003), 117–164.

[55] 太田 隆夫, 界面ダイナミクスの数理, (1997) 日本評論社

[56] J.P. キーナー (坂元訳), 応用数学 上, 下, (2007) 日本評論社

[57] 西浦廉政，非平衡ダイナミクスの数理，(2009) 岩波書店.

[58] 村田 實・倉田 和浩, 楕円型・放物型偏微分方程式, (2006) 岩波書店

[59] 森田 善久，二宮 広和，反応拡散方程式における進行波解と全域解, 数学 **59** (2007), 225-243

現象数理学：冬の学校参加者内訳

講師	5人
大学生4年	12人
大学院生 M1	11人
大学院生 M2	9人
大学院生 D	14人
PD	8人
教員	15人
社会人その他	4人
	78人

東北大学	5人
埼玉大学	1人
慶応義塾大学	1人
中央大学	2人
電気通信大学	1人
東京大学	7人
東京工業大学	1人
東京都市大学	2人
東京理科大学	1人
放送大学	1人
明治大学	6人
早稲田大学	1人
金沢大学	1人
岐阜大学	1人
名古屋大学	3人
京都産業大学	1人
岡山大学	1人
広島大学	3人
鳥取大学	1人
九州大学	6人
	46人

科学研究費補助金 基盤研究 (S)「非線形非平衡反応拡散系理論の確立」

現象数理学：冬の学校

パターンダイナミクス 1-2-3

2009 年 12 月 9 日（水)〜11 日（金)

明治大学紫紺館 3 階会議室

プログラム：

12 月 9 日（水)：

13:00 - 14:30 西浦廉政（北海道大学）

「生まれ，広がり，ぶつかる世界
ーパターンダイナミクス入門ー」

14:50 - 17:50 森田善久（龍谷大学）

「反応拡散方程式における平衡解の安定性解析入門」

12 月 10 日（木)：

10:00 - 12:00, 13:30 - 14:30 小川知之（大阪大学）

「反応拡散系に現れる振動パターン」

14:50 - 17:50 宮本安人（東京工業大学）

「安定パターンの形状と非線形ホットスポット予想」

12 月 11 日（金)：

10:00 - 12:00 二宮広和（明治大学）

「最大値の原理から見たパターン形成」

科学研究費補助金基盤研究 (S)「非線形非平衡反応拡散系理論の確立」(代表者：三村昌泰) の教育研究活動の一環として，これから現象数理学の研究を始めようとする学生の方々に向けた，入門的内容を主とした冬の学校を開催いたします．当代一流の研究者が「パターンダイナミクス」についてゆっくりと語ります．参加費は無料ですが，参加登録が必要となります (先着 80 名)．講演要旨，参加登録方法に関する詳細情報は下記ホームページをご覧下さい．

http://nnrds.math.meiji.ac.jp/

連絡先：現象数理学・冬の学校事務局　winter_school2009@math.meiji.ac.jp

組織委員：三村昌泰 (明治大学), 西浦廉政（北海道大学），小川知之（大阪大学），上山大信 (明治大学), 若狭徹 (早稲田大学)

後援：

科学研究費補助金基盤研究 (S)「非線形非平衡反応拡散系理論の確立」http://nnrds.math.meiji.ac.jp/

明治大学グローバル COE プログラム「現象数理学の形成と発展」 http://gcoe.mims.meiji.ac.jp/

明治大学先端数理科学インスティテュート・現象数理部門　http://www.mims.meiji.ac.jp/