可積分系とPainlevé方程式

千葉　逸人

1. 求積可能な方程式と Lie の定理

多くの物理現象は微分方程式で記述されるため，微分方程式を解くことは数学の立場からも物理の立場からも重要である．しかし方程式が “解ける” ということをきちんと定義することは難しい．ある時代には解けなかった方程式が，数学の発展と共に解けるようになることも当然あり得る．Weierstrass の方程式

$$(y')^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$$

の一般解は Weierstrass の $\wp$ 関数で表すことができる．$\wp$ 関数の素性はよく研究されているため，今日では解ける非線形微分方程式の代表格であるが，18 世紀にはまだ難しかっただろう．20 世紀以降は微分方程式の定性理論である力学系理論が大きく発展したため，解を明示的に書くよりも定性的な性質 (例えば，任意の解が時間 $t \to \infty$ で 0 に収束する，など) を示したほうがより理解したと言える，という立場も出てきた．

しかしそういうことを言い出しても話が始まらないので，ここでは古典的な立場をとる．次のような n 次元の常微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in \mathbf{R},\, x \in \mathbf{R}^n \tag{1}$$

を考える．与えられたデータ (f と，次の定理で述べる群作用の具体的な表示) に対する微分，積分，逆関数をとる操作と四則演算の有限回の操作で任意の解が得られるとき，方程式は**求積可能である**という．これに関して次の Lie による定理が基本的である[1)]．

定理 1　(Lie の定理) (t,x) 空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ に作用する k 次元可解 Lie 群 G の作用で方程式 (1) が不変であるとする．このとき，方程式 (1) は有限回の操作で $n-k$ 次元の方程式に帰着できる．特に，n 次元可解 Lie 群の作用で不変ならば (1) は求積可能である．

ここで n 次元群 G が可解 Lie 群であるとは，次元が 1 つずつ落ちる正規部分群の列

$$G \supset G^{(n-1)} \supset \cdots \supset G^{(1)} \supset \{e\}$$

が存在することをいう．また，Lie 群の作用に関してある種の非退化性の条件が必要であることを注意しておく (この記事では，直感的な理解を優先して細かい条件や用語の説明を省略することがある)．

まず，(1) が 1 次元の方程式のときは 1 次元の Lie 群の作用で不変ならば求積可能である．簡単のため，群作用は平行移動 $x \mapsto x + c\,(c:$ 定数$)$ であるとする．この作用で不変な 1 次元の方程式は $x' = f(t)$ であり，変数分離形なのでただちに解ける．群作用が平行移動でない場合は，座標系をうまく取り直して局所的に作用を平行移動にすればよい (したがって，一般に Lie の定理は局所理論であることに注意)．

次に，n 次元の方程式 (1) が n 次元 Lie 群 G の作用で不変であるとする．$G^{(n-1)}$ を G の $n-1$ 次元部分 Lie 群とする．ここでも簡単のため，$G^{(n-1)}$ の作用は $x_2, \cdots, x_n$ 方向の平行移動 $x_i \mapsto x_i + c_i,\ (i = 2, \cdots, n)$ とする．そのような方程式の右辺は $x_2, \cdots, x_n$ に依存しないため，特に x_1 の方程式は $x_1' = f_1(t, x_1)$ という形をしている．この方程式を解くために，G のうちまだ使っていない情報，すなわち $G/G^{(n-1)}$ の元を用いたいが，これが Lie 群でありその作用が well-defined であるためには $G^{(n-1)}$ は正規部分群である必要がある．このとき，$x_1' = f_1(t, x_1)$ は 1 次元 Lie 群 $G/G^{(n-1)}$ の作用で不変であるから求積できる．残った $(x_2, \cdots, x_n)$ についての方程式は

$G^{(n-1)}$ の作用で不変である．帰納的に同じ手続きを繰り返せば，結局変数分離形の積み重ねに帰着できることになる．

2. Hamilton 系に対する可積分性

$2n$ 変数の滑らかな関数 $H(q_1, \cdots, q_n, p_1 \cdots, p_n)$ に対し，次で定義される $2n$ 次元の微分方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \; \frac{dp_i}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \cdots, n) \quad (2)$$

を Hamilton 系といい，H をその Hamilton 関数という (この節以降は，方程式の右辺が独立変数の t に依存しない問題のみを扱う)．エネルギーの散逸のない多くの物理系はこの形で定式化可能である．例えばポテンシャル V を持つ Newton の運動方程式

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

は，$q_i' = p_i$ とおいて 1 階連立に書き直すと，

$$\begin{aligned} H &= (\text{運動エネルギー}) + (\text{ポテンシャルエネルギー}) \\ &= \frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_n^2) + V(q_1, \cdots, q_n) \end{aligned}$$

として上式の形に書ける．まず，関数 H は任意の解軌道に沿って時間 t についての定数関数であることに注意しておこう．すなわち，

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \right) = 0$$

を示すのは容易である．このように軌道に沿って時間について定数となる関数を系の**第一積分**，あるいは**保存量**という．Hamilton 系に対しては，前節の Lie の定理が特別にいい形で書けて，幾何との相性も良くなる．次の定理を述べるために，$\mathbf{R}^{2n}$ 上の滑らかな関数 F, G に対する **Poisson 括弧**を

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (3)$$

で定義する．

定理 2　(Liouville-Arnold の定理)[2)]

Hamilton 系の微分方程式 (2) に対して，n 個の第一積分 $H_1 = H$ と $H_2, \cdots, H_n$ が存在して，
(i) $H_1, \cdots, H_n$ は適当な領域で関数独立，かつ
(ii) 任意の i, j に対して $\{H_i, H_j\} = 0$ のとき，
Hamilton 系 (2) は Lie の意味で求積可能である．このとき，特に (2) は **Liouville 可積分**であるという．さらに，条件 (i) が成り立つ領域において，ある座標変換 $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n) \mapsto (I_1, \cdots, I_n, \phi_1, \cdots, \phi_n)$ が存在して，方程式 (2) を次の形に変換できる．

$$\frac{dI_i}{dt} = 0, \quad \frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i(I_1, \cdots, I_n) \quad (4)$$

一般に，関数 H に対する Hamilton 系 (2) の右辺が定義するベクトル場を X_H と表す．これについて次の公式が知られている．

$$X_{\{F,G\}} = [X_G, X_F]$$

ここで右辺はベクトル場の括弧積である．これを用いて定理 2 の意味するところを説明しよう．

$j = 2, \cdots, n$ に対して仮定 $\{H, H_j\} = 0$ と上の公式から $[X_H, X_{H_j}] = 0$ が分かる．ベクトル場の括弧積の意味を考えると，これは Hamilton 系 (2) が，ベクトル場 X_{H_j} の流れが定義する 1-パラメータ群の作用で不変であることを意味する．したがって前節の Lie の手続きから次元を 1 つ落とせるが，実は Hamilton 系の場合は，次元を同時に 2 つ落とすことができる．というのも，仮定より H_j は保存量 $(dH_j/dt = 0)$ であるから，適当な定数 c_j に対して，解軌道は $H_j(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n) = c_j$ で定義される $2n-1$ 次元の超曲面に含まれている．再び仮定 $\{H, H_j\} = 0$ よりベクトル場 X_H はこの超曲面に接しており，したがってその上の $2n-1$ 次元の微分方程式を定めている．これが X_{H_j} が定義する 1-パラメータ群の作用で不変なので，さらに次元を 1 つ落とせる．この手続きを $j = 2, \cdots, n$ に対して繰り返し行えば方程式を求積できる．

定理の最後の主張で述べられている I_j $(j = 1, \cdots, n)$ を**作用変数**, ϕ_j $(j = 1, \cdots, n)$ を**角変数**という．方程式 (4) によれば I_j は時間の定数であるから，$\{I_j\}_{j=1}^n$ は $\{H_j\}_{j=1}^n$ の適当な組み合わせだと思えばよい．$\{H_j\}_{j=1}^n$ は第一積分であるから，解軌道は

$$M_c = \{H_j(q_1, \cdots, p_n) = c_j \,(\text{定数}),\, j = 1, \cdots, n\}$$

で定義される n 次元の多様体の上に束縛されている．M_c の上には，n 個のベクトル場 $X_{H_1}, X_{H_2}, \cdots, X_{H_n}$ を M_c に制限して得られるベクトル場があり，これらは互いに可換 $[X_{H_i}, X_{H_j}] = 0$ である．よって，これらの流れは M_c に作用する n パラメータ加法群を定義する．ところが n 次元の可換 Lie 群は $\mathbf{R}$ と $\mathbf{T}^1 = [0, 2\pi)$ の直積しかないから，適当な r に対して M_c の連結成分は $\mathbf{R}^r \times \mathbf{T}^{n-r}$ に同相となる．これが角変数 $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$

が運動する空間である．$(I_1, \cdots, I_n)$ は軌道に沿って定数であったから (4) の右辺もそうであり，よって $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ は M_c 上を等速運動する．特に解が有界ならば $M_c \simeq \mathbf{T}^n$ であり，角変数の運動はトーラス上の周期軌道，または準周期軌道となる．さらに第一積分 $\{H_j\}$ が全て多項式ならば M_c は代数多様体であり，このとき系は代数的完全可積分であるという．このときは作用変数の空間や角変数の空間に複素代数多様体の構造が入り，より幾何的に面白くなる.[2)]

なお，与えられた変数 $(q_1, \cdots, p_n)$ を具体的に作用-角変数に変換する計算は，方程式を求積する操作と同値であり，一般には複雑すぎて解の挙動を理解するために有効とは限らないことを注意しておく．特に，逆関数をとる操作を繰り返し伴うので，きれいな表示で書けることは稀である．

3. Hamilton 系から Lax 方程式へ

唐突ではあるが，可積分系の中でも特に重要なクラスである Lax 方程式を導入し，Liouville 可積分系はいつでも Lax 方程式の形に書けることを示す．

しばらく係数体は $\mathbf{C}$ としておく．$\mathfrak{g}$ を n 次正方行列全体がなす Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$，あるいはその部分 Lie 代数とする．$L(t), M(t) \in \mathfrak{g}$ に対し，

$$\frac{dL}{dt} = [L, M] = LM - ML \tag{5}$$

で定義される微分方程式を **Lax 方程式**という．この方程式は豊富な保存量を持つことを示そう．方程式

$$\frac{dU}{dt} = UM, \quad U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$$

の解で，初期条件 $U(0) =$(単位行列) を満たすものを $U(t)$ とする．このとき，Lax 方程式の解は $L(t) = U(t)^{-1}L(0)U(t)$ で与えられる．実際，

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(U(t)^{-1}L(0)U(t))\\ &= (-U^{-1}U'U^{-1})L(0)U + U^{-1}L(0)U'\\ &= -MU^{-1}L(0)U + U^{-1}L(0)UM\\ &= [U^{-1}L(0)U, M]\end{aligned}$$

なので，$L(t) = U(t)^{-1}L(0)U(t)$ は確かに方程式を満たしている．行列の固有値は相似変換で不変なので，行列 $L(t)$ の固有値は t について一定，すなわち全て保存量になることが分かった．その意味で，Lax 方程式のことを**等スペクトル変形**を定める方程式と呼ぶこともある．実際には固有値よりも特性多項式を考えるほうが都合がよい．

$$\det(\lambda - L(t)) = \lambda^n + I_1\lambda^{n-1} + \cdots + I_{n-1}\lambda + I_n$$

とおく．$I_1, \cdots, I_n$ は固有値の対称式で書けるから，これらもやはり運動の保存量である．こちらの方は $L(t)$ の成分に関する多項式になっているため扱いやすい．これら n 個の関数が全て関数独立かという問題は残っているが，ともかく Lax 方程式からは系統的に保存量を構成できることが分かった．

Liouville 可積分な Hamilton 系は Lax 方程式で表すことができることを示そう．$\{D_i, E_i\}_{i=1}^n$ で生成される Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を関係式

$$\begin{cases} [D_i, D_j] = 0 = [E_i, E_j] \\ [D_i, E_j] = 2\delta_{ij}E_j \end{cases}$$

で定義する (このような Lie 代数は $2n \times 2n$ 行列の空間で表現できる)．I_j, θ_j を $\mathfrak{g}$ 上の関数として，$L, M \in \mathfrak{g}$ を

$$L = \sum_{j=1}^n (I_jD_j + 2I_j\theta_jE_j)$$
$$M = \sum_{j=1}^n \omega_j(I_1, \cdots, I_n)E_j$$

と定義すると，Lax 方程式 (5) は作用-角変数で書いた方程式 (4) と同値であることを見るのは容易い．したがって Liouville 可積分系は Lax 方程式で表すことができる．ただし，前に述べたように可積分系を作用-角変数で表すのは難しいため，一般に与えられた方程式の Lax 表示を見つけるのは容易ではない．また Lax 方程式で書けるとしても L, M は一意ではないことを注意しておく．

4. Lie-Poisson 構造から Lax 方程式へ

Lax 方程式を系統的に作ることができる方法がある．それがこの節で述べる Lie-Poisson 構造である．Poisson 構造の定義から始めよう．

$\mathbf{R}^m$ とその上の C^∞ 級関数全体 $C^\infty(\mathbf{R}^m)$ を考える (一般の多様体でもよいが，局所理論しか扱わないから Euclid 空間で説明する)．関数 $F, G \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ に対して関数 $\{F, G\} \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ を割り当てる操作で次の条件を満たすものを $\mathbf{R}^m$ 上の **Poisson 括弧**という．

(i) 双線形性 $a, b \in \mathbf{R}$ に対して

$$\{aF+bG,H\}=a\{F,H\}+b\{G,H\}$$
$$\{F,aG+bH\}=a\{F,G\}+b\{F,H\}$$

(ii) 歪対称性 $\{F,H\}=-\{H,F\}$

(iii) **Jacobi 恒等律**

$$\{\{F,H\},G\}+\{\{G,F\},H\}+\{\{H,G\},F\}=0$$

(iv) **Leibnitz 則**

$$\{F,HG\}=\{F,H\}G+H\{F,G\}$$

(3) の Poisson 括弧はこの定義の特別な場合である．F の勾配を $dF=\mathrm{grad}F$ とする (m 次元の縦ベクトル)．双線形性と Leibnitz 則から，$\{F,G\}=(dF)^{\mathrm{T}}PdG$ を満たす m 次正方行列 P が存在することが分かる．これを **Poisson テンソル**と呼ぶ．歪対称性から行列 P も歪対称 ($P^{\mathrm{T}}=-P$) であり，Jacobi 恒等律からある複雑な条件を満たさねばならない．$H\in C^{\infty}(\mathbf{R}^m)$ に対して PdH は $\mathbf{R}^m$ 上のベクトル場を定めるが，これを H が定める **Hamilton ベクトル場**といい，X_H と表す．$x=(x_1,\cdots,x_m)$ を適当な座標とするとき，$dx/dt=PdH(x)$ が対応する常微分方程式系である．$m=2n$ で Poisson 括弧が (3) で与えられるときは，この方程式は Hamilton 系 (2) に一致する．

任意の $F\in C^{\infty}(\mathbf{R}^m)$ に対して $\{F,C\}=0$ を満たす関数 C を **Casimir 関数**という．定義から $PdC=0$ であるから関数 C の Hamilton ベクトル場は恒等的に零であり，関数独立な Casimir 関数の個数は $\mathrm{Ker}\,P$ の次元に等しい．今，独立な Casimir 関数が r 個あるとしてそれらを $C_1,\cdots,C_r$ とする．このとき，

$$S_\alpha=\{x\in\mathbf{R}^m\,|\,C_i(x)=\alpha_i\,(\text{定数}),i=1,\cdots,r\}$$

で定義される $m-r$ 次元多様体を**シンプレクティック葉**という．任意の Hamilton ベクトル場 X_H は S_α に接しており，したがって S_α 上のベクトル場を定める．つまり，X_H が定める m 次元の常微分方程式は $m-r$ 次元の方程式に帰着される．実際，S_α はシンプレクティック多様体であり，S_α 上の Hamilton ベクトル場は局所座標系をうまくとれば普通の Hamilton 系 (2) の形に書くことができる．

以上のことは係数体が $\mathbf{C}$ でも同様である．以下では係数体は $\mathbf{C}$ とし，有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の上に自然に入る Poisson 構造である Lie-Poisson 構造を導入する．

まず，双対空間 $\mathfrak{g}^*$ の上に自然に定まる Poisson 構造を定義する．$F:\mathfrak{g}^*\to\mathbf{C}$ を $\mathfrak{g}^*$ 上の C^{∞} 関数とする．点 $\mu\in\mathfrak{g}^*$ におけるその微分 $dF(\mu)$ は $\nu\in\mathfrak{g}^*$ に線形に作用する．そこで

$$dF(\mu)(\nu)=:\langle\nu\,,\,\frac{\delta F}{\delta\mu}\rangle$$

により $\mathfrak{g}$ の元 $\delta F/\delta\mu$ を定義することができる．要するに自然な対応 $\mathfrak{g}^{**}\simeq\mathfrak{g}$ により $dF(\mu)\in\mathfrak{g}^{**}$ を $\mathfrak{g}$ の元と見直したものが $\delta F/\delta\mu$ である．このとき，$\mathfrak{g}^*$ 上の **Lie-Poisson 括弧**は

$$\{F,G\}(\mu)=\langle\mu\,,[\frac{\delta F}{\delta\mu},\frac{\delta G}{\delta\mu}]\rangle$$

で定義される．$\mathfrak{g}$ 上に ad 不変かつ非退化な内積 $\eta(\cdot,\cdot)$ があるときはこれを通して $\mathfrak{g}^*$ と $\mathfrak{g}$ が同一視できるから，$\mathfrak{g}$ 上にも Poisson 括弧が誘導され，それは

$$\{F,G\}(X)=\eta(X,[\nabla F,\nabla G]),\quad X\in\mathfrak{g}$$

で与えられる．ただし，$\nabla F\in\mathfrak{g}$ は同型 $\mathfrak{g}^*\simeq\mathfrak{g}$ を通して $F\in C^{\infty}(\mathfrak{g})$ の微分 $dF\in\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ 上に引き戻したものである．ここで $\eta(\cdot,\cdot)$ が ad 不変とは

$$\eta(X,[Y,Z])=\eta([X,Y],Z)$$

が成り立つことをいう．$\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数のときにはそのような内積として Killing 形式がある．$\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ の部分代数の場合は

$$\eta(X,Y)=\mathrm{Tr}(XY)$$

だと思ってよい．例えば $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ でその一般の点を

$$X=\begin{pmatrix}u & v\\ w & -u\end{pmatrix}$$

とすると，∇F と Poisson テンソルは

$$\nabla F=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial w}\\ \frac{\partial F}{\partial v} & -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u}\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0 & v & -w\\ -v & 0 & 2u\\ w & -2u & 0\end{pmatrix}$$

で与えられる．また，$\mathfrak{g}$ 上の Lie-Poisson 構造の Casimir 関数は，対応する Lie 群 G の随伴作用の不変式であることが知られている．よって $\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数のときには独立な Casimir 関数の個数は $\mathfrak{g}$ のランクに等しく，それらは行列の成分に関する多項式で書ける．例えば $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_l(\mathbf{C})$ のときは $X\in\mathfrak{sl}_l(\mathbf{C})$ の特性多項式の係数が Casimir 関数になっている．

この Lie-Poisson 構造について，Hamilton ベクトル場が定義する微分方程式を求めよう．関数 $H\in C^{\infty}(\mathfrak{g})$ の Hamilton ベクトル場 X_H の関数 G への作用は，X_H

の定義から

$$X_H(G) = \langle dG\,,\,X_H \rangle = \langle dG\,,\,PdH \rangle = \{G, H\}.$$

一方，Poisson 括弧の定義から点 $Y \in \mathfrak{g}$ において

$$\{G, H\}(Y) = \eta(Y, [\nabla G, \nabla H]) = \eta(\nabla G, [\nabla H, Y]).$$

最後の等式では内積の ad 不変性を使った．さらに ∇G の定義を思い出すと $\eta(\nabla G, [\nabla H, Y]) = \langle dG\,,\,[\nabla H, Y] \rangle$ が分かる．これらの等式を比べると，X_H の点 Y における値は $[\nabla H, Y]$ に等しく，したがって対応する微分方程式は Lax 方程式

$$\frac{dY}{dt} = [\nabla H, Y] \tag{6}$$

で書けることが分かった．Y の固有値，あるいは特性多項式の係数は運動の保存量であるが，一般にはその数は $\mathfrak{g}$ の次元よりもずっと小さく，方程式が可積分かどうかは分からない．そこで，可積分な Lax 方程式を構成するために，多重 Poisson 構造を導入する．

5. 多重 Poisson 構造

同じ空間の上に k 個の異なる Poisson 括弧が定義されており，その任意の線形結合もまた Poisson 括弧の公理を満たすとき，これを**多重 Poisson 構造**という．以下では $k = 2$ とする (このときは双 Poisson 構造ということが多い)．すなわち，ある空間上に 2 つの Poisson 括弧 $\{\cdot,\cdot\}_1$ と $\{\cdot,\cdot\}_2$ が定義されており，任意の $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して $\lambda\{\cdot,\cdot\}_1 - \{\cdot,\cdot\}_2$ もまた Poisson 括弧になっているとする．$\lambda\{\cdot,\cdot\}_1 - \{\cdot,\cdot\}_2$ の Casimir 関数はパラメータ λ に依存する．今，それは λ について多項式であり

$$C_\lambda = \lambda^n H_0 + \lambda^{n-1} H_1 + \cdots + H_n$$

と表せると仮定しよう．Casimir の定義から $\lambda\{\,\cdot\,, C_\lambda\}_1 - \{\,\cdot\,, C_\lambda\}_2 = 0$ である．これを λ のべきで整理すると

$$\{\,\cdot\,, H_0\}_1 = \{\,\cdot\,, H_n\}_2 = 0$$
$$\{\,\cdot\,, H_j\}_1 = \{\,\cdot\,, H_{j-1}\}_2,\ (j = 1, \cdots, n)$$

を得る．第 1 式は，H_0, H_n がそれぞれ $\{\cdot,\cdot\}_1, \{\cdot,\cdot\}_2$ の Casimir 関数であることを意味している．第 2 式は Poisson テンソルを用いると $P_1 dH_j = P_2 dH_{j-1}$ とも書ける．これは，同じベクトル場が異なる 2 つの Poisson 構造を用いて表示できることを意味する．また第 2 式を使うと，任意の $0 \leq i, j \leq n$ に対して

$$\{H_i, H_j\}_1 = 0 \tag{7}$$

となることが分かる．実際，

$$\{H_i, H_j\}_1 = \{H_i, H_{j-1}\}_2 = -\{H_{j-1}, H_i\}_2$$
$$= -\{H_{j-1}, H_{i+1}\}_1 = \{H_{i+1}, H_{j-1}\}_1$$

といった計算を繰り返して第 1 式が使える状況に持ち込めばよい．よって Hamilton ベクトル場 $P_1 dH_1, \cdots, P_1 dH_n$ は括弧積に関して互いに可換である．

今，与えられた空間の次元は m であるとし，そこで定義された Poisson 構造 $\{\cdot,\cdot\}_1$ はちょうど r 個の独立な Casimir 関数を持つとする．また $\{\cdot,\cdot\}_1$ を含む双 Poisson 構造 $\lambda\{\cdot,\cdot\}_1 - \{\cdot,\cdot\}_2$ があるとしよう．このとき，上のように $\lambda\{\cdot,\cdot\}_1 - \{\cdot,\cdot\}_2$ の Casimir を用いて交換条件 (7) を満たす関数族を見つけることができる．そのうち $\{\cdot,\cdot\}_1$ の Casimir と独立なものが n 個あるとしてそれを $H_1, \cdots, H_n$ とおく．この設定のもと，以下のようにして次元の低い Hamilton 系を作ることができる．まず，$\{\cdot,\cdot\}_1$ の Casimir 関数の等位面で定義されるシンプレクティック葉 S_α をとる．これは $m - r$ 次元のシンプレクティック多様体であり，$P_1 dH_1, \cdots, P_n dH_n$ はその上の Hamilton 系を定める．条件 (7) から，$P_1 dH_1$ に対応する常微分方程式はベクトル場 $P_1 dH_2, \cdots, P_1 dH_n$ の流れが定義する $n-1$ パラメータ群の作用である．したがってさらに次元を $2n-2$ だけ落とせて，$m - r - 2n + 2$ 次元の Hamilton 系を得る．この値が 2 ならば，S_α 上のベクトル場 $P_1 dH_1$ は Liouville 可積分かつ Lax 方程式で書ける．

6. 多重 Lie-Poisson 構造と Painlevé 方程式

与えられた Poisson 括弧 $\{\cdot,\cdot\}_1$ に対して，それとペアになるもう 1 つの Poisson 括弧 $\{\cdot,\cdot\}_2$ を方針なく見つけるのは極めて難しい．Jacobi 恒等律が非線形な条件のため，適当な 2 つの Poisson 括弧の和は普通は Jacobi 恒等律を満たさない．実は，ここでも Lie 代数を用いて多重 Poisson 構造を構成することができる．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して次の集合を考える．

$$\mathfrak{g}_n = \{X_\lambda = \lambda^n X_0 + \lambda^{n-1} X_1 + \cdots + X_n \mid X_i \in \mathfrak{g}\}$$

すなわち，$\mathfrak{g}$ に値をとる λ についての n 次多項式全体である．$X_\lambda, Y_\lambda \in \mathfrak{g}_n$ に対して

$$\begin{aligned}[X_\lambda, Y_\lambda]_n &:= [X_n, Y_n] \\ &+\lambda\left([X_n, Y_{n-1}] + [Y_{n-1}, X_n]\right) + \cdots \\ &+\lambda^n\left([X_0, Y_n] + [X_1, Y_{n-1}] + \cdots + [X_n, Y_0]\right)\end{aligned}$$

とおくと，この括弧積により $\mathfrak{g}_n$ は Lie 代数になる．ここで右辺の括弧積は $\mathfrak{g}$ 上のものである．この右辺は，$[X_\lambda, Y_\lambda]$ を λ について展開して λ^n までで打ち切ったものになっている．この Lie 代数 $\mathfrak{g}_n$ の Lie-Poisson 括弧を $\{\cdot,\cdot\}_0$ と表そう．

s をパラメータとして λ をシフトしたもの $X_{\lambda+s}$ を λ のべきで整理したものは再び $\mathfrak{g}_n$ の元であるから，写像 $X_\lambda \mapsto X_{\lambda+s}$ は $\mathfrak{g}_n$ 上の同型を定める．この同型写像で $\{\cdot,\cdot\}_0$ を写すと，パラメータ s に依存する新しい Poisson 括弧 $\{\cdot,\cdot\}_s$ が得られるが，これは s について

$$\{\cdot,\cdot\}_s = \{\cdot,\cdot\}_0 + s\{\cdot,\cdot\}_1 + s^2\{\cdot,\cdot\}_2 + \cdots$$

と展開できる．実は，右辺に現れた $\{\cdot,\cdot\}_j$ たちの任意の一次結合は Poisson 括弧になり，したがってこれらは多重 Poisson 構造を定めることが知られている[3)]．したがって前節最後の手続きにより，$\{\cdot,\cdot\}_j$ のシンプレクティック葉の上で定義された Hamilton 系を構成できる．特に $\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数のときには Casimir 関数等を具体的に計算することができて，$m-r-2n+2=2$ となる，すなわち得られた Hamilton 系は Liouville 可積分となる．さらに，ある $A_\lambda \in \mathfrak{g}_n$ が存在して，それは次のような Lax 方程式で書ける．

$$\frac{dX_\lambda}{dt} = [A_\lambda, X_\lambda] \tag{8}$$

この方程式は 2 つのパラメータを含んでいる．1 つは λ であり，これはただの文字である．上式を λ についての恒等式として同じ次数で両辺を比較することで，λ を含まない微分方程式系が得られる．もう 1 つは，シンプレクティック葉 S_α の選び方の任意性からくるパラメータ $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ である．今，そのうちの 1 つ α_1 を適当にとり，

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{\partial X_\lambda}{\partial \alpha_1} \tag{9}$$

が成り立つようにできたとしよう．これを上式に加えると

$$\frac{\partial X_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial X_\lambda}{\partial \alpha_1} = [A_\lambda, X_\lambda] + \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda}$$

となる．そこで形式的に α_1 を t に置き換えると

$$\frac{\partial X_\lambda}{\partial t} = [A_\lambda, X_\lambda] + \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} \tag{10}$$

を得るが，これを**等モノドロミ変形**を定める Lax 方程式という．実はこの形で書ける微分方程式は Painlevé 性を持つ，いわゆる **Painlevé 方程式**であることが知られている[4)]．α_1 を t に置き換えたから方程式の右辺は t を含む，つまり非自励系の方程式だから，Hamilton 関数をはじめとして (8) の保存量であったものは保存量でなくなる．よって Painlevé 方程式は一般に可積分ではないが，解ける方程式と解けない方程式のちょうど狭間に位置すると考えられている．

具体例として $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, $n=2$ の場合を考える．このときは α をパラメータとして

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} p & -q \\ \alpha + q^2 & -p \end{pmatrix}$$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2q & 0 \end{pmatrix}$$

である．これを Lax 方程式 (8) に代入して整理すると，

$$\begin{cases} q' = 2p \\ p' = 3q^2 + \alpha \end{cases}$$

なる Hamilton 系を得る．q のみについての方程式に書き直すと $q'' = 6q^2 + 2\alpha$ となるが，この一般解は Weierstrass の $\wp$ 関数を用いて書き下せる．一方，これらの行列は条件 (9) を満たしているので，α を独立変数 t に置き換えて得られる方程式 $q'' = 6q^2 + 2t$ は (10) のほうの Lax 方程式を満たし，これは，計 6 つある 2 階の Painlevé 方程式の最初のメンバーである第 1 Painlevé 方程式に他ならない．同じことを $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ と一般の n に対して行うと，方程式 (8) の方からは KdV ヒエラルキの定常流と呼ばれるソリトン方程式由来の $2n-2$ 次元の Liouville 可積分系が得られ，(10) の方からは第 1 Painlevé ヒエラルキと呼ばれる $2n-2$ 次元の Painlevé 方程式の系列が得られる．

参考文献

1) P. J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer, (2013).
2) Adler, Moerbeke, Vanhaecke, Algebraic Integrability, Painleve Geometry and Lie Algebras, Springer, (2004).
3) G. Magnano, F. Magri, Poisson-Nijenhuis structures and Sato hierarchy. Rev. Math. Phys. 3 (1991).
4) 岡本和夫, パンルヴェ方程式, 岩波書店, (2009)

（ちば・はやと，九州大学）