関数方程式のダイナミクスとスペクトル理論

千 葉　逸 人

1. 関数方程式

多くの物理現象は数学的な関係式を用いて記述され，その関係式を調べることで，より一層現象の理解が深まる．特に，ある物理量 u の時間変化を支配する方程式は，次のような微分方程式

$$\frac{du}{dt} = F(t, u) \tag{1}$$

で与えられることが多い．未知量 u は時間 t 以外の変数に依存することもあるし，写像 F の詳細は問題に依存する．いくつか例を見てみよう．

バネ定数 k のバネの先端に取り付けられた質量 m の質点の運動を考えよう．時刻 t における質点の変位を $y(t)$，質点と床の間の摩擦係数を μ とするとき，運動方程式は 2 階の常微分方程式

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

で与えられる．時刻 t における質点の速度を $dy/dt = v(t)$ とすると，上式は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\mu/m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \tag{2}$$

のように行列とベクトルを使って 1 階の常微分方程式の形に書ける．したがってこの場合，(1) の u は $u = (y, v) \in \mathbf{R}^2$ なる 2 次元ベクトルであり，F は u に行列を作用させる写像である．

物理量 u の拡散を表す方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u \tag{3}$$

で与えられる．ここで $u = u(t, x)$ は時間 t，および空間変数 $x \in \mathbf{R}^n$ に依存する関数であり，Δ は

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

で定義される n 次元のラプラシアンである．定数 D は拡散係数と呼ばれる．例えば物体を伝わる熱の挙動は式 (3) で記述され，$u(t, x)$ は時刻 t，位置 x における物体の温度を表す．また，適当な媒質中を拡散していく化学物質の濃度も (3) で記述されることが多い．より一般に，化学物質が他の物質との化学反応により合成・分解している場合には，合成・分解を表す項 f を付け加えた方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(t, x, u) \tag{4}$$

が考えられる．一般に f は u について非線形項であり，このようなタイプの偏微分方程式は反応拡散系と呼ばれる．

波の伝わり方を記述する波動方程式は，c を定数として $\partial^2 u/\partial t^2 = c\Delta u$ で与えられる，時間について 2 階の偏微分方程式である．式 (2) の導出の真似をして $v = \partial u/\partial t$ とおけば

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ c\Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{5}$$

となり，(1) の形に表すことができる．このときの F は作用素を成分に持つ 2×2 の行列である．

これらの他にも，Schrödinger 方程式や Navier-Stokes 方程式など，物理現象を記述する偏微分方程式は多く知られている．一方，希薄流体の運動を表す Boltzmann 方程式のように確率密度関数が未知関数であるような方程式の場合には，方程式が未知関数の積分を含む積分方程式になることがしばしばある．この場合には (1) の F は積分作用素を含むであろう．このように，F がどのような写像かによって方程式のタイ

プは様々であるが，そういった方程式のタイプに捉われずに一般的に (抽象的に) 方程式 (1) を研究したいときは，(1) のことを単に関数方程式と呼ぶことが多い．特に (1) は「未知関数の時間微分 $= (\cdots)$」という形をしているので，(時間) 発展型の関数方程式といい，主に t が増大していくときの u の挙動に興味がある．

2. 線形方程式の解の漸近挙動

簡単のため，写像 F が t に依存せず，u に対して線形写像である場合を考えよう．F の代わりに A と書くことにする:

$$\frac{du}{dt} = Au. \tag{6}$$

(2),(3),(5) はこのタイプの方程式である．

(i) 有限次元の場合.

未知量 u が有限次元ベクトル空間 $X(\mathbf{R}^n$ か $\mathbf{C}^n$ としておく) の元で，A が X 上の線形写像のとき，(6) を有限次元の線形方程式と呼ぶ．このとき，A は $n\times n$ の行列であるから，(6) を成分ごとに

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

と書くことができる．したがって有限次元の線形方程式とは，単に線形の常微分方程式のことに他ならない．よく知られているように，任意に与えた初期値 $u(0) \in \mathbf{C}^n$ に対して (6) の解は一意に存在し，それは行列の指数関数を使って

$$u(t) = e^{At}u(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} u(0) \tag{7}$$

と表される．行列の対角化，あるいは Jordan 標準形を知っていれば行列の指数関数を計算するのはそれほど難しくなく，$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ を行列 A の互いに相異なる固有値とするとき，(6) の解は $e^{\lambda_i t} \times$ (多項式) の形の項の一次結合で書ける．この表式からただちに次のことが分かる．

定理 1　行列 A の固有値の実部が全て負のとき，(6) の任意の解は $t \to \infty$ で指数的に 0 に収束する．もし 1 つでも実部が正なる固有値が存在すれば，(6) の解で指数的に発散するものが存在する．

後の都合のため，定理 1 の別証を与えておこう．線形常微分方程式は Laplace 変換を用いて解くことができる．Laplace 変換論によれば，(6) の解は Laplace 逆変換の公式を用いて

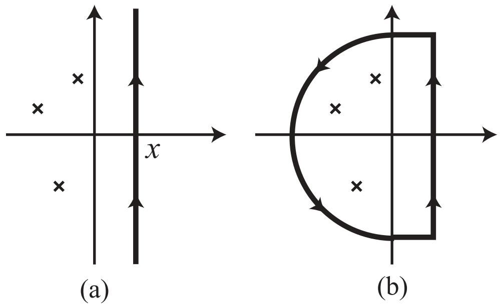

図 1　積分路の変形．×印は固有値を表す．

$$u(t) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{x-iy}^{x+iy} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}u(0)d\lambda \tag{8}$$

で与えられる．ここで，x は A のどの固有値の実部よりも大きい適当な実数である (図 1(a))．上式の積分は留数定理を用いて計算できるが，そのために次のことを思い出しておこう．行列 $(\lambda - A)^{-1}$ の成分は λ についての有理関数であり，A の固有値がちょうど極になっている．すなわち，式 (8) の被積分関数の特異点は A の固有値のみから成る．そこで式 (8) の積分路を図 1(b) のように変形して留数定理を用いれば，$u(t)$ が $e^{\lambda_i t} \times$ (多項式) の形の項の一次結合で書けることが分かる．

(ii) 無限次元の場合.

方程式 (6) において，u がある無限次元ベクトル空間 X の元，A が X 上の線形作用素のとき，(6) は無限次元の方程式であるという．拡散方程式 (3) は無限次元の方程式の代表格であるが，無限次元の方程式の難しさの 1 つとして，方程式を指定してもベクトル空間 X の選び方に依って解の構造が変わりうることが挙げられる．以下でいくつかの具体例を見てみよう．簡単のため，拡散係数は $D = 1$，空間変数 x は 1 次元としておく．

(a) $L > 0$ を適当な実数として，式 (3) は区間 $0 \le x \le L$ 上で定義されているとする．これを

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \tag{9}$$

という境界条件のもとで解くことを考えよう．このとき，空間 $X := C_D^0[0, L]$ を，閉区間 $[0, L]$ 上で連続かつ $f(0) = f(L) = 0$ を満たす複素数値関数 $f(x)$ の全体としよう．標準的な加法により，実際にこれは $\mathbf{C}$ 上の無限次元ベクトル空間になる．式 (3) を境界条件 (9)

のもとで解きなさいという問題は，式 (3) の解を空間 $X = C^0_D[0, L]$ の中で探しなさい，という問題に他ならない．

(b) 式 (3) の解のうち，導関数までこめて有界なものを探したいとしよう．このときは適当な自然数 r をとって $X = BC^r(\mathbf{R})$ とおくのがよい．これは，$f(x), f'(x), \cdots, f^{(r)}(x)$ が $\mathbf{R}$ 上で一様連続かつ有界であるような関数 f の全体からなる空間である．

(c) 式 (3) の解のうち，2 乗可積分であるものを探したいとしよう．このときは $X = L^2(\mathbf{R})$ を 2 乗可積分 ($\int |f(x)|^2 dx$ が存在する) な関数全体からなる空間とするのがよい．

上の 3 つの空間はいずれもある標準的なノルムの定義により Banach 空間になり，$A = \Delta$ の定義域はそれぞれ X の稠密な部分空間であることを注意しておく．さて，方程式 (6) と空間 X が与えられたとき，次の 2 つの基本的な問題が起こる．

well-posedness. 任意に与えられた初期値 $u(0) \in X$ に対し，式 (6) を満たす解 $u(t)$ が X の中に一意に存在し，それは $t \geq 0$ について連続かつ初期値の変動に関して連続か?

漸近挙動. 解が任意の $t \geq 0$ について存在したとき，$t \to \infty$ における解の振舞いは?

この記事では well-posedness の問題は扱わず (上の 3 つの例は全て well-posed である[1])，解の漸近挙動の問題を考えることにする．目下の疑問は,「無限次元の方程式に対しても定理 1 に対応する定理があるか?」である．

3. 線形作用素のスペクトル

定理 1 の無限次元バージョンを見つけるために，固有値の一般化概念であるスペクトルを導入のは自然なことであろう．以下では簡単のため X を Banach 空間とし，A を X 上の線形作用素とする．A のレゾルベント集合 $\rho(A)$ を，$(\lambda - A)^{-1}$ が存在して X 上の連続作用素となるような $\lambda \in \mathbf{C}$ の全体として定義し，A のスペクトル集合 $\sigma(A)$ を $\rho(A)$ の $\mathbf{C}$ における補集合として定義する．簡単に言えば，スペクトルとは $(\lambda - A)^{-1}$ がたちの悪い性質を持つ点 λ のことであるが，さらに次の 3 つに分類することができる．

点スペクトル $\sigma_p(A)$.　$\lambda - A$ が X 上単射でないような点 λ の全体.

剰余スペクトル $\sigma_r(A)$.　$\lambda - A$ が X 上単射であるが，その値域が X の稠密な部分空間でないような点 λ の全体.

連続スペクトル $\sigma_c(A)$.　$\lambda - A$ は単射かつ値域が稠密であるが，逆写像 $(\lambda - A)^{-1}$ が X 上の連続作用素にならないような点 λ の全体.

点スペクトルとは A の固有値，すなわち $Av = \lambda v$ が X の中に $v \neq 0$ なる解 v を持つような点 λ の全体に他ならない．A が有限次元の行列のときには $\lambda - A$ が単射であることと全射であることは同値であるが，無限次元のときには同値にならない．そこで $\lambda - A$ が全射にならないような λ を特別扱いしたいが，実は大抵の場合には $\lambda - A$ は全射になり得ない．そこで条件を少し緩めて，$\lambda - A$ の値域が稠密になるような λ を特別扱いする．それが剰余スペクトルである．もし λ が点スペクトルでも剰余スペクトルでもなければ，逆写像 $(\lambda - A)^{-1}$ が存在してその定義域は稠密である．さらに，もし $(\lambda - A)^{-1}$ が連続作用素であれば，定義域を X 全体へと連続に拡張できる．そのように拡張できない λ の全体が連続スペクトルである．

前節の 3 つの例に対してそのスペクトルを計算してみよう．ただしいくつかの証明は省略する．

(a) $A = \Delta, X = C^0_D[0, L]$ とする．固有方程式は

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \lambda v, \quad v(0) = v(L) = 0$$

である．常微分方程式の簡単な計算から，$v \in C^0_D[0, L]$ を満たす $v \neq 0$ が存在するのは $\lambda = -(n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \cdots$ のときに限ることが分かる．したがって $\sigma_p(A) = \{-(n\pi/L)^2 \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ である．連続スペクトルと剰余スペクトルは存在しないことが示せる．

(b) $A = \Delta, X = BC^r(\mathbf{R})$ とする．常微分方程式 $v'' = \lambda v$ の解のうち，$\mathbf{R}$ 上有界な解が存在するのは，$\lambda = 0$ のときは $v = 1$, $\lambda < 0$ のときは $v(x) = \cos\sqrt{-\lambda}x, \sin\sqrt{-\lambda}x$, に限る．したがって $\lambda = 0$ と負の実軸が固有値である．それ以外にスペクトルは存在しない．

(c) $A = \Delta, X = L^2(\mathbf{R})$ とする．常微分方程式 $v'' = \lambda v$ の解のうち $L^2(\mathbf{R})$ に属するものは $v = 0$ を除いて存在しない．したがって点スペクトルは空集合である．では連続スペクトルはどうだろうか．適当な $f \in X$ に対して $(\lambda - A)^{-1} f$ を計算してみよう．$(\lambda - A)u = f$ を満たす u を求めればよい．$L^2(\mathbf{R})$

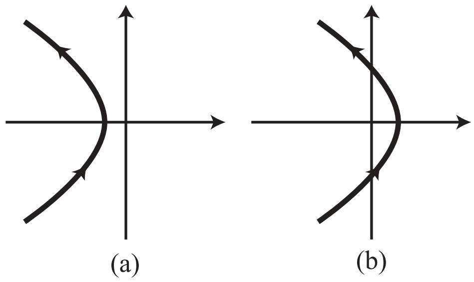

図 2　積分路の変形.

は Fourier 変換で不変であることに注意して，両辺を Fourier 変換して解くと $\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)/(\lambda+\xi^2)$ を得る．λ が 0 か負の実数のとき，これは ξ の関数として 2 乗可積分でないことは容易に分かる．いい加減な観察ではあるが，実際に $\lambda = 0$ と負の実軸が連続スペクトルであることが示せる．剰余スペクトルは存在しない．

以上の 3 つの例から，方程式が同じでも X の選び方でスペクトルが変わることが分かるだろう．したがって，もし定理 1 の無限次元バージョンが存在するとすれば，解の漸近挙動も X の選び方に依存すると思われる．これが無限次元の方程式の難しさであり，面白さでもある．では定理 1 の無限次元バージョンは本当にあるのか? 実は Banach 空間上の有界作用素に対しては，そのスペクトル集合は有界集合になることが知られている．上の 3 つの例はいずれもスペクトルが非有界であるから，$A = \Delta$ は非有界作用素，すなわち $||A|| = \infty$ である．このとき，無限級数 (7) は $t > 0$ において収束しない．したがって，指数関数を用いて定理 1 を得ようとする試みは破たんするのである．そこで Laplace 逆変換の出番になる．A が非有界作用素の場合にも式 (8) の右辺は一定の条件のもと存在することが知られている[1)]．ここではその条件について深入りしないし，以下の議論でも (8) の積分が確定する場合のみを扱う．

4. 角域作用素

もし Laplace 逆変換の積分路を，特異点 (= スペクトル集合) を通らずに図 2(a) のように変形できたら，被積分関数の $e^{\lambda t}$ という因子のために，解 $u(t)$ は指数的に減衰することが分かる．一方，もし右半面にスペクトルが存在して図 2(b) のようにしか変形できない場合は指数的に発散するかもしれない．いずれの場合にも，積分路の遠方では $e^{\lambda t}$ が急速に減衰するため，(8) の右辺の存在証明は特別に簡単になることに注意しておこう．以上の観察に基づいて，以下の定義を設ける．

$$S_{\phi,a} = \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, \pi - \phi < \arg|\lambda - a| < \pi + \phi\}$$

を，点 $a \in \mathbf{R}$ を中心とする $\mathbf{C}$ 上の角領域とする．

定義. Banach 空間 X 上で稠密に定義された閉作用素 A について，ある $a \in \mathbf{R}$ と $0 < \phi < \pi/2$ が存在して $\sigma(A)$ が $S_{\phi,a}$ に含まれるとき，A を**角域作用素**と呼ぶ．実際には (8) の積分を収束させるための $||(\lambda - A)^{-1}||$ の大きさに対する仮定も必要だが，ここでは技術的なことには触れない[2)]．

この仮定のもとでは実際に (8) の積分路を図 2 のように変形させることができ，所望の結果を得る．

定理 2　A を角域作用素とし，スペクトル集合 $\sigma(A)$ の任意の点が $\mathrm{Re}(\lambda) < \alpha$ を満たすとする．このとき，任意の $u(0) \in X$ に対して関数方程式 $\partial u/\partial t = Au$ の解が X の中に一意に存在して，ある $C > 0$ に対して $||u(t)|| < Ce^{\alpha t}$ を満たす．

前に挙げた 3 つの例はいずれも角域作用素である．特に (a) においてはスペクトルは負の実軸に含まれているから，解が指数的に減衰することが分かる．物理的には，両端の温度を 0 に固定した長さ L の棒の温度の挙動を記述する問題である．両端から熱が逃げていくため，温度が急激に下がっていくことは直観とも合致する．一方，(b), (c) ではスペクトルが原点を含んでいるため，定理 2 からは解は減衰するとも増大するとも言えない．(b) においては $\lambda = 0$ が固有値であり，その固有関数である $v = 1$ が厳密解なのだから，減衰も増大もしない解が存在することが分かる．(c) においては，実は任意の解が $O(1/\sqrt{t})$ で減衰することが知られている．$L^2(\mathbf{R})$ 関数は遠方で緩やかに減衰しているため，熱が少しずつ遠方に逃げていくわけだ．証明法はいくつかあるが，次のようにするのが最も簡単である:

方程式 $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ に対して $t = e^\tau$, $x = \sqrt{t}\xi$ とおいて (t, x) から (τ, ξ) への変数変換を行うと，$v(\tau, \xi) := u(t, x)$ は次の微分方程式を満たす．

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\xi\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

右辺の微分作用素の固有値問題は，(係数の違いを除いて)Hermite の微分方程式に他ならないことに注意すると，任意の解を固有関数展開できて

$$v(\tau,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{\lambda_n\tau}H_n(\frac{\xi}{2})e^{-\xi^2/4}$$

と書けることが分かる．ここで H_n は Hermite 多項式，$\lambda_n=-(n+1)/2$ は上の微分作用素の固有値である．特に v は $O(e^{-\tau/2})$ で減衰するから，u は $O(1/\sqrt{t})$ で減衰する．発見的に見えるこの方法は，実は Lie 群論に基づいている．拡散方程式は $t\mapsto c^2t,\ x\mapsto cx$ というスケール変換で不変である．$x=\sqrt{t}\xi$ という変数変換は，ξ が群の作用の不変量になるような標準座標への変換に他ならない．言い換えれば，である．$t=e^{\tau}$ という変換は，多項式減衰を指数的減衰に帰着させるためのトリックだと思えばよい[*1)]．

以上の例からも，関数空間の選び方，作用素の定義域やスペクトルのタイプによって，解の挙動がまったく異なるものになることが分かるだろう．

以下では，初期値 $u(0)$ に対して解 $u(t)$ を対応させる線形写像を $T(t)$ と表す．有限次元の場合には $T(t)=e^{At}$ は行列の指数関数である．定理 2 は，$T(t)$ が作用素ノルムに関して $||T(t)||<Ce^{\alpha t}$ を満たす，と言い換えることができる．

A が角域作用素でない場合には何か言えることはあるだろうか．実は任意の正の実数 $a,b>0$ に対して，次の性質を満たす作用素 A が存在することが知られている[3)]：$\sigma(A)$ は領域 $\mathrm{Re}(\lambda)<-a$ に含まれるが，$T(t)$ のノルムは e^{bt} の速さで発散する．したがって，A のスペクトルからは解の漸近挙動が分からないのだ．困難の本質はスペクトル写像定理が成り立たないことにある．行列 A に対しては，e^{At} の固有値は A の固有値を用いて $e^{\lambda t}$ で与えられることを思い出そう．スペクトル集合の記号を用いて書けば，$e^{\sigma(A)t}=\sigma(e^{At})$ が成り立つ．無限次元空間上の作用素に対しても，集合の等式 $e^{\sigma(A)t}=\sigma(T(t))$ が成り立つとき，スペクトル写像定理が成り立つという．A が有界作用素や Hilbert 空間上の自己共役作用素の場合にはスペクトル写像定理が成り立つが，一般には $e^{\sigma(A)t}\subset\sigma(T(t))$ である．これは，$T(t)$ の中には $\sigma(A)$ からはうかがい知ることが出来ない情報が含まれうることを示している．実は，非有界作用素 A の定義域 $\mathsf{D}(A)$ は空間 X 全体にはならず，その部分空間であるが，$T(t)$ の定義域は X 全体になる．したがって，$\mathsf{D}(A)$ に含まれない初期値 $u(0)$ に対する解 $u(t)=T(t)u(0)$ の情報を A の情報だけから得るのは困難なのだ．逆に言えば，$\mathsf{D}(A)$ に含まれる初期値に制限すれば，$T(t)u(0)$ の挙動についてもう少しよいことが言える[3)]．

*1) さらに詳しく言うと，$u(t,x)$ は $t\to\infty$ でガウス分布に収束していく．より一般の方程式に対しても，解が $t\to\infty$ で，ある Lie 群の作用で不変な解に収束するときには，ここで紹介したものと同様のテクニックが有効であると考えられる．この手法は，物理の業界では“くりこみ群”という名でしばしば用いられる．

5. 一般化スペクトル理論の展開

A が角域作用素でない場合には，典型的にはそのスペクトルは虚軸方向に沿って無限遠まで伸びている．このような問題 (の一部) を扱うための一般化スペクトル理論を紹介しよう．具体例を中心に解説していく．$L^2(\mathbf{R})$ 上で ix を乗じる掛け算作用素を $\mathcal{M}:\phi(x)\mapsto ix\phi(x)$ とおく．$\mathcal{M}$ のスペクトルは連続スペクトルのみからなり，それは虚軸全体となる: $\sigma(\mathcal{M})=i\mathbf{R}$．スペクトルの定義から，レゾルベント作用素 $(\lambda-A)^{-1}$ は右半面と左半面では λ についての関数として正則であるが，虚軸上では ($L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素として) 値が確定しない．ところが，収束や発散は空間の位相の選び方に依存する概念である (ガウス分布は，分散を 0 に持っていく極限において，普通の関数としては発散するが，超関数の位相ではデルタ関数に収束することを思い出そう)．$L^2(\mathbf{R})$ とは異なる位相を導入することにより，レゾルベントを虚軸上でも収束させることができるだろうか．これを見るために，適当な関数 $\phi,\psi\in L^2(\mathbf{R})$ をとって内積

$$((\lambda-\mathcal{M})^{-1}\phi,\psi)=\int\frac{1}{\lambda-ix}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

を考える．λ が右半面にあるときには右辺の積分は確定するが，これを虚軸に近づけていくと，$1/(\lambda-ix)$ という因子のため，少なくとも被積分関数は発散する．しかし被積分関数が発散していても，積分値は広義積分として存在し得る．この場合，実は ϕ,ψ が連続関数であれば次の値

$$\lim_{\mathrm{Re}(\lambda)\to+0}\int\frac{1}{\lambda-ix}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx.$$

が確定する．ここからさらに λ を左半面へ向かって連続的に動かそう．ϕ,ψ が虚軸の近傍の適当な領域で正則ならばそれが可能である．すなわち，$((\lambda-\mathcal{M})^{-1}\phi,\psi)$ の右半面から左半面への解析接続は

$$\int\frac{1}{\lambda-ix}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx+2\pi\phi(i\lambda)\overline{\psi(i\lambda)}$$

で与えられる．以下では説明の簡単のために ϕ と ψ は

整関数であるとしよう．以上の考察から，

$$
\begin{aligned}
&R(\lambda;\phi,\psi) \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{\lambda - ix}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx \\ \displaystyle\int \frac{1}{\lambda - ix}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx + 2\pi\phi(i\lambda)\overline{\psi(i\lambda)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(1 行目は $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ のとき，2 行目は $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ のとき) によって R を定めると，これは λ について整関数となる．今，X を $L^2(\mathbf{R})$ の部分空間であるクラスの整関数からなるものとし，X' を X の双対空間，すなわち X 上の連続線形汎関数全体がなすベクトル空間としよう．関数 $\phi \in X$ を選ぶごとに複素数値 $R(\lambda;\phi,\psi)$ が定まるから，写像 $\phi \mapsto R(\lambda;\phi,\psi)$ は X 上の線形汎関数を定める．この線形汎関数を $R(\lambda;\bullet,\psi)$ と表す．X の位相はこの線形汎関数が連続であるように選ばれているものとする．すると，写像 $\psi \mapsto R(\lambda;\bullet,\psi)$ は X から X' への線形写像 $\mathcal{R}_\lambda$ を定める．結局 $\mathcal{R}_\lambda(\psi)(\phi) = R(\lambda;\phi,\psi)$ であるが，定義の仕方から，λ が右半面にあるときは $\mathcal{R}_\lambda = (\lambda - \mathcal{M})^{-1}$ である．そこで，$\mathcal{R}_\lambda$ を $\mathcal{M}$ の一般化レゾルベントと呼ぼう．今示したことをまとめよう：

$\mathcal{M}$ のレゾルベント $(\lambda - \mathcal{M})^{-1}$ は，$L^2(\mathbf{R})$ から $L^2(\mathbf{R})$ への作用素だと思うと虚軸上で発散するが，X から X' への作用素だと思うと虚軸でも確定し，λ について (X'-値の) 整関数である．

X は $L^2(\mathbf{R})$ の稠密な部分空間であり，その埋め込みは連続であるとすると，$L^2(\mathbf{R})$ の双対空間は X' に連続的に埋め込める．ところが $L^2(\mathbf{R})$ は Hilbert 空間なので自分自身の双対と同型である．その同型対応を通して，

$$X \subset L^2(\mathbf{R}) \subset X' \tag{10}$$

なる空間の 3 つ組が得られる．これを Gelfand の 3 つ組，あるいは rigged Hilbert space という．

掛け算作用素を例にとって解説したが，以上のことは適当なクラスの作用素に対して行える[4]．一般に，$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，A をその上の線形作用素とする．A のスペクトルとは，レゾルベント $(\lambda - A)^{-1}$ の特異点集合のことであった．A は連続スペクトルを持つと仮定しよう．上と同様の手続きにより，うまい空間 X を見つけることができて，X から X' への作用素としては $(\lambda - A)^{-1}$ が連続スペクトルを越えて解析接続 $\mathcal{R}_\lambda$ を持つことが示せたとする．するとこの解析接続 $\mathcal{R}_\lambda$ が，スペクトルとは異なる新たな特異点を持つかもしれない．これを一般化スペクトルと呼ぶことにする．定義上，一般化スペクトルは固有値とは異なるが，固有値と近い働きをすると考えられる．これが，関数方程式の解の挙動について，通常のスペクトル理論では分からなかった情報を提供してくれるのである．例として

$$(A\phi)(x) = ix\phi(x) + K\int_{\mathbf{R}} \phi(x)dx \cdot g(x) \tag{11}$$

により $L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素 A を定め，対応する発展方程式 (6) を考えよう．ここで $K > 0$ は定数であり，g は標準正規分布だとしておく (正則関数ならば以下の議論は可能である)．この形の積分方程式は，結合振動子系の研究においてしばしば現れる[5]．詳細は省くが，パラメータが $0 < K < \sqrt{2/\pi}$ を満たすとき，A のスペクトルは $\mathcal{M}$ のそれと同様に，虚軸のみからなることが示せる．したがって A は角域作用素ではないし，たとえそうだとしても虚軸上のスペクトルのため，定理 2 からは漸近挙動は分からない．そこで A の一般化スペクトルを計算してみると (すなわち，適当な正則関数 ϕ, ψ に対して $((\lambda - A)^{-1}\phi, \psi)$ とその解析接続を計算し，その特異点を探すと)，左半面に可算無限個の一般化スペクトルが存在することが分かる．これと Laplace 逆変換の公式を用いると，(6) の解 $u(t)$ が X' の位相において指数的に減衰することが示せる．これは普通のスペクトル理論では分からなかったことである．ここでは紙面の都合で線形方程式のみを扱ったが，スペクトル理論，および一般化スペクトル理論は，非線形関数方程式の解析にも有効であり，今後様々な応用が期待される[2,5]．

参考文献

1) 藤田宏，伊藤清三，黒田成俊，関数解析，岩波書店 (1991).
2) D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer, (1981)
3) W. Kerscher, R. Nagel, Asymptotic behavior of one-parameter semigroups of positive operators, Acta Appl. Math. 2 (1984), 297-309.
4) H.Chiba, A spectral theory of linear operators on rigged Hilbert spaces under certain analyticity conditions, (arXiv:1107.5858)
5) H.Chiba, I.Nishikawa, Center manifold reduction for a large population of globally coupled phase oscillators, Chaos, 21, 043103 (2011).

（ちば・はやと，九州大学）