

まえがき

力学系理論とは、時々刻々と変化するあらゆるものを対象とする数学の分野です。原子のようなミクロな世界から惑星の運動、電流や流体の流れ、化学反応、脳波や睡眠などの生物リズム、人口や株価の変動などの社会現象、これらによって引き起こされるカオスなど・・・さまざまな現象が力学系として表すことができます。今日ではこれらの研究手法は多岐にわたっていますが、時代を経てもあらゆる手法を数学が支えていることに変わりはありません。大学の授業では“解ける”微分方程式を扱うことが多いかもしれませんが、実はほとんどの微分方程式は解析的に解くことができません。本書では“解く”ことだけでなく、“解けない”方程式に立ち向かうための基本的な知識を、具体的に手を動かして解の様子を記述できるような話題を中心に織り交ぜたつもりです。

本書は大きく分けて次のような3部構成になっています。

- (I) 第1章～第6章 常微分方程式の解法
- (II) 第7章～第14章 連続力学系 ～解の安定性・分岐と特異摂動法～
- (III) 第15章～第17章 離散力学系 ～カオス～

第1章～第6章では“解ける”方程式を解くことを中心として、微分方程式の基礎について解説します。特に力学系の局所理論の土台となる線形の微分方程式について詳しく扱います。第6章のあとに少し微分方程式論と力学系理論に関する余談をはさんだ後、第7章～第14章は微分方程式の定性理論である連続力学系の理論から、その基礎事項と“解けない”方程式の解析手法、主に安定性理論・特異摂動法・分岐理論を紹介します。第15章～第17章は離散力学系を中心としてカオスとはどのようなものかについて理解することを目標としています。なるべくどの章からでも読めるようにしていますが、微分方程式は聞いたことがあるけど、力学系理論という言葉に馴染みがないという読者は、第7, 8章の図を眺めることから始めてもよいかもしれません。

本書は微分方程式と力学系理論の両方から話題を選んで紹介しているため、どちらの分野に対しても網羅的とは程遠いものです。また、力学系の専門家を目指さない方でも手短にその概要を掴むことができるよう、長すぎる証明やテクニカルな証明はアイデアを述べるにとどめています。なるべく詳細の参考文献は挙げていたので活用してください。また、各章末の放課後談義のコーナーと6章後の余談では、本に書ききれなかった発展的な話題を簡単に紹介しています。そちらもぜひ楽しんでください。

惑星の2体問題（太陽のまわりを回る地球の運動は楕円軌道であること）はニュートンによって解決されました。その後長らく、3体問題（太陽、地球、月の運動を解析すること）は未解決のまま残っていましたが、1890年代にポアンカレが「3体問題は解析的に解けない」ことを証明し、そこから“解けない”方程式を解析するための力学系理論が発展しました。本書を通して、解ける問題を解く楽しさ、解けない問題を考える楽しさを味わっていただきたいと思います。

本書は『月刊 理系への数学』にて2007年5月号から2008年9月号まで連載された「解くための微分方程式と力学系」を土台に加筆したものです。連載時にお世話になった方々、および連載と単行本化の機会を与えてくださった現代数学社の富田栄さんと富田淳さんに感謝いたします。

2021年8月 千葉 逸人

目次

第 1 章 1 階の微分方程式	9
1.1 いろいろな微分方程式	9
1.2 定数係数の 1 階線形方程式	14
1.3 定数係数でない 1 階線形微分方程式	18
第 2 章 2 階の線形微分方程式 (同次形)	27
2.1 2 階の定数係数線形微分方程式の解法	27
第 3 章 2 階の線形微分方程式 (非同次形)	37
3.1 非同次形の 2 階線形微分方程式の解法 1	37
3.2 非同次形の 2 階線形微分方程式の解法 2 ～共鳴現象～	40
3.3 非同次形の 2 階線形微分方程式の解法 3 ～一般の場合～	44
第 4 章 高階の線形微分方程式	49
4.1 高階の線形微分方程式	49
4.2 簡単な連立微分方程式	53
第 5 章 線形微分方程式系と行列の指数関数	61
5.1 ベクトル値の微分方程式	61
5.2 線形微分方程式系の基礎定理	63
5.3 対角化可能な場合	73
5.4 べき零行列の場合	77
5.5 ジョルダン標準形の場合	78
5.6 一般の行列の場合	78
第 6 章 変数分離法	85
<i>A digression</i>	93

6 目次

第 7 章 線形力学系の相図	99
7.1 相空間	99
7.2 いろいろな相図	101
7.3 線形方程式の解の安定性	104
第 8 章 非線形力学系の相図	109
8.1 非線形現象	109
第 9 章 ベクトル場の流れ	123
9.1 ベクトル場とその流れ	123
9.2 不動点の安定性	125
9.3 線形方程式の安定性	127
9.4 非線形方程式の不動点の安定性	129
9.5 位相共役	133
第 10 章 ベクトル場の標準形	137
10.1 安定多様体と不安定多様体	137
10.2 ベクトル場の標準形	141
10.3 対角化できない場合の標準形	149
10.4 標準形の性質	150
第 11 章 1 次元力学系の分岐	153
11.1 1 次元力学系の相図	153
11.2 サドル・ノード分岐	154
11.3 トランスクリティカル分岐	157
11.4 ピッチフォーク分岐	158
11.5 ホップ分岐	159
第 12 章 くりこみ群の方法	163
12.1 くりこみ群のアイデア	163
12.2 くりこみ群の方法の主定理	171
12.3 不変多様体の存在	175

第 13 章 中心多様体	179
13.1 中心多様体論	179
13.2 くりこみ群の方法 2	184
第 14 章 周期軌道の分岐	191
14.1 ホップ分岐	191
14.2 ポアンカレ写像と周期軌道の安定性	195
14.3 ホモクリニック分岐	198
14.4 ポアンカレ・ベンディクソンの定理	202
第 15 章 離散力学系の分岐	207
15.1 離散力学系	207
15.2 不動点とその安定性	208
15.3 不動点の分岐	210
第 16 章 カオス 1	217
16.1 ロジスティック写像	217
16.2 不変カントール集合	220
16.3 記号力学系	224
16.4 カオスの特徴づけ	230
第 17 章 カオス 2	233
17.1 スメールの馬蹄	233
17.2 横断的ホモクリニック点から生じるカオス	237
17.3 ホモクリニック軌道から生じるカオス	239
問の略解	245
索引	251

索引

●あ〜お

アーノルドの舌, 178
亜臨界ピッチフォーク分岐, 159
安定多様体, 138
安定部分空間, 105, 138

位相共役, 135
位相共役 (離散力学系), 226
位相混合的, 229
位相推移的, 229
位相半共役, 231
1 階線形微分方程式, 11
一般解, 16

打ち切り形 (標準形の), 150

永年項, 165

横断的ホモクリニック点, 238
 ω 極限集合, 203

●か〜こ

回帰性, 230
解軌道, 100
解軌道 (離散力学系), 207
カオス, 117, 230
カスケード, 230
コントロール集合, 220

帰還時間, 196
記号空間, 224, 235
記号力学系, 224, 235
既約, 227
境界値問題, 95
共振, 42
共鳴, 42
共鳴条件, 146
行列の指数関数, 63

蔵本モデル, 118
くりこみ群変換, 174, 185
くりこみ群方程式, 166, 174, 185

懸垂, 214

固定点, 111

●さ〜そ

サドル・ノード分岐, 155
サドル・ノード分岐 (離散力学系), 211

シフト写像, 224, 235
周期解, 111
周期軌道, 111
周期点, 210
周期倍分岐, 212
初期条件, 15
初期値鋭敏性, 229
初期値問題, 95
シルニコフ分岐, 244
自励系, 62, 109

スツルム-リウヴィル問題, 95
スメールの馬蹄, 234

斉次形, 37, 52
摂動論, 47
セバラトリックス, 115
遷移行列, 225, 235
漸近安定, 125
漸近安定 (ホモクリニック軌道), 199
漸近安定 (周期軌道), 196
線形化方程式, 130
線形微分方程式, 63

双曲安定, 128, 131
双曲型, 128
双曲型周期軌道, 197
双曲型不動点, 131

252 索引

双曲型不動点 (離散力学系), 209
相空間, 100, 109
相図, 100, 109

●たへと

ダフィン方程式, 116
単振り子, 114

中央 1/3 カントール集合, 221
中心多様体, 180
中心多様体縮約, 184
中心部分空間, 105, 138
稠密, 227
超臨界ピッチフォーク分岐, 159
調和振動子, 58, 163

定数係数の 1 階線形微分方程式, 10, 14
定数係数の n 階線形微分方程式, 50
定数係数の 2 階線形微分方程式, 27, 37
定数変化法, 20, 33

同期現象, 59, 119
同次形, 37, 52
特異摂動法, 47
特異点, 89
特殊解, 16
特性乗数, 197
特性方程式, 28
トランスクリティカル分岐, 157

●なへの

流れ, 123

2 階線形微分方程式, 27, 37
2 倍写像 (Rényi 写像, Bernoulli 写像), 231

●はへほ

ハートマン・グロブマンの定理, 135
爆発解, 89
バン屋写像, 237

非自励系, 62
非斉次形, 37
ピッチフォーク分岐, 158
ピッチフォーク分岐 (離散力学系), 211
非同次形, 37
微分方程式, 10
標準形, 144, 145

不安定, 125
不安定多様体, 138
不安定部分空間, 105, 138
ファンデルポール方程式, 13, 113
不動点, 111, 125
不動点 (離散力学系), 208
不変集合, 138
不変集合 (離散力学系), 220
不変多様体, 138
分岐, 114
分岐図, 155

平衡点, 111
べき級数法, 96
冪正, 229
べき零行列, 77
ベクトル値微分方程式, 61
ベクトル場, 123
ヘテロクリニック軌道, 115
ベルヌーイの方程式, 89
変数分離形, 86

ポアンカレ写像, 196
ポアンカレ断面, 196
ポアンカレ・ベンディクソンの定理, 202
捕食者-被食者モデル, 110
ホップ分岐, 160, 170, 191
ホモクリニック軌道, 116, 198
ホモクリニック・タングル, 239
ホモクリニック分岐, 202

●まへも

マシュー方程式, 178

未定係数法, 39

メルニコフ関数, 202

●やへよ

有限部分シフト, 225, 235

●らへろ

リー微分, 143
力学系, 100
離散力学系, 207
リッカチ方程式, 90
リミットサイクル, 196
リヤプノフ安定, 125

連立微分方程式, 53

ローレンツ方程式, 120, 187

ロジスティック写像, 217

ロトカ-ボルテラ方程式, 109