

まえがき

本書は大学の学部生や社会人を対象にしたベクトル解析の入門書であり、『月刊理系への数学』にて2005年11月号から2006年12月号まで連載していたものを土台としています。

ベクトル解析学とは3次元空間中の曲線と曲面の理論、および3次元空間中の微分積分学であり、本書でも第1章から第8章までは主にこの話題に充てられています。ベクトル解析の物理・工学への応用と言えば挙げだしたらきりがなく、本書でもできるだけ物理学への応用問題を紹介するように努めました。一方、ベクトル解析には、数学科の学生が学ぶような高次元の幾何学、抽象的な幾何学を理解するためのエッセンスがたくさん詰まっており、これを放っておく術はありません。そこで各章末の発展と第9～11章では、ベクトル解析からほんの少しだけ背伸びをして、微分幾何学や位相幾何学からいくつかの話題を紹介することにしました。特に第10章、第11章では、オイラーの多面体公式

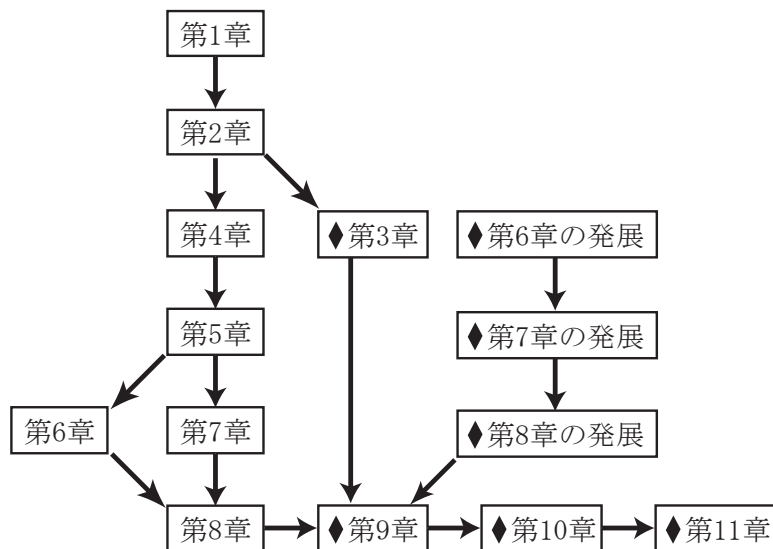
$$\text{多面体の (面の数) - (辺の数) + (頂点の数) = 2}$$

や、「地球上に風の吹かない点はない」ことを主張するオイラー・ポアンカレの定理が示されます。このような不思議な定理が3次元空間中の微分積分学の応用として導き出せるなんて、なんとも魅力的ではありませんか!?

本書の構成

本書は大きく分けて、標準的なベクトル解析のコースで学ぶ内容と、微分形式を用いてベクトル解析を見直し、微分幾何学や位相幾何学にまで触れた内容(次ページ図で◆印をつけている)の2つから成り、後者は最初に読むときには飛ばすことができます。

各章の章末には「発展」があり、これはその章に関連したやや発展的な話題を紹介することで読者の皆さんに少し高級な数学にも興味を持ってもらうことを目的としています。特に第6～8章の「発展」は微分形式の導入とその計算法に充てられており、これは第9章以降で用いられます。これらはあくまで発展的課題の簡単な紹介に留めてあるから数学的な厳密さに欠ける部分もあり、読者にあらぬ誤解を与えてしまうことを恐れますが、その代わり本書末に参考文献を詳しく挙げておいたので、興味ある読者は自ら本書で至らなかった部分をカバーしてくれることを期待します。



問いと章末問題

本文中にはいくつかの問を与えています。これらの中にはかなり難しいものも含まれますが、いずれも本文の内容を理解するために重要な事実ばかりです。解答もかなり詳しく与えておいたので、是非とも問の意味をよく理解し、解答をじっくり読んでいただくことを期待します。一方、章末問題では比較的易しめの計算問題を与えています。必要に応じて基礎事項の確認のために利用してください。

『月刊 理系への数学』連載時には、6人のモニターの方々に原稿を読んでもらい、貴重なご意見をいただきました。特にモニターから寄せられた素朴な疑問は各章末に「モニターの声」として紹介しています。この場を借りてモニターの伊藤秀行君(大阪市立大学)、遠藤裕子さん(東京理科大学)、小川修一郎君(東京農工大学)、栗田芙実さん(パリ第6大学)、小石祐介君(東京大学)、前田一貴君(京都大学)に感謝します(括弧内は連載開始当時の所属)。最後に、「ベクトル解析からの幾何学入門」の連載、および単行本化の機会を与えてくださった現代数学社の富田栄さんに感謝いたします。

2007年9月 千葉 逸人

目次

第 1 章 ベクトルの内積と外積	9
1.1 ベクトルの内積	9
1.2 ベクトルの外積	12
1.3 ベクトル値関数	15
発展 ~抽象ベクトル空間の内積と外積~	17
モニターの声	19
第 2 章 曲線論	23
2.1 曲線のフレネ・セレの公式	23
2.2 いくつかの具体例	28
発展 ~フレネ・セレの公式の意味するもの~	31
モニターの声	32
第 3 章 曲面論	35
3.1 曲面の接ベクトル	35
3.2 ガウス曲率と平均曲率	37
発展 ~高次元の幾何学~	47
モニターの声	48
第 4 章 勾配 (grad)	53
4.1 勾配	53
4.2 接平面の方程式	55
4.3 極大値・極小値	57
発展 ~位相幾何学~	60
モニターの声	62

6 目次

第 5 章 発散 (div) と回転 (rot)	65
5.1 発散	65
5.2 回転	68
5.3 grad, rot, div の関係	70
発展 ～発散と保存則～	74
モニターの声	76
第 6 章 ポテンシャル論	81
6.1 ポアンカレの補題 1	81
6.2 ポアンカレの補題 2	85
6.3 物理学への応用	89
発展 ～微分形式の導入～	95
モニターの声	99
第 7 章 線積分と面積分	101
7.1 スカラー場の線積分	101
7.2 ベクトル場の線積分	105
7.3 2重積分の復習	109
7.4 曲面の面積	110
7.5 スカラー場の面積分	112
7.6 ベクトル場の面積分	113
発展 ～微分形式と面積分～	115
モニターの声	118
第 8 章 積分定理	121
8.1 グリーンの定理	121
8.2 ストークスの定理	124
8.3 ガウスの定理	127
8.4 ポアンカレの補題再考	130
発展 ～ n 次元のストークスの定理～	133
発展 ～単連結～	135
モニターの声	138

第 9 章 微分形式からの曲面論	141
9.1 曲線論の復習	141
9.2 曲面論の復習	142
9.3 曲面論の基礎方程式	145
発展 ～高次元の幾何学 2～	149
モニターの声	151
第 10 章 ガウス・ボネの定理	153
10.1 オイラー数	153
10.2 ガウス・ボネの定理	154
10.3 オイラーの多面体公式	158
発展 ～閉曲面の分類定理～	161
モニターの声	162
第 11 章 オイラー・ポアンカレの定理	163
11.1 いろいろな曲面	163
11.2 曲面のオイラー数	167
11.3 ベクトル場とオイラー数	168
発展 ～微分方程式の不動点～	173
第 12 章 問の解答	177
第 13 章 章末問題の解答	209
参考文献	215
索引	218

索引

●欧文・記号

div, 66
grad, 53
rot, 69

●あ～お

鞍点, 44, 57, 169

位相幾何学, 60
位置エネルギー, 89
位置ベクトル, 9

渦, 69
運動方程式, 30

円柱座標, 64, 79

オイラー数, 61, 153, 167
オイラーの多面体公式, 159
オイラー・ポアンカレの定理, 171
(ベクトルの) 大きさ, 10

●か～こ

外積, 12
回転, 69
回転行列, 50
回転ベクトル, 95
外微分, 96
ガウス曲率, 41, 144
ガウスの定理, 127
ガウスの方程式, 148
ガウス・ボネの定理, 157
角運動量, 17
可縮, 85

球座標, 64, 79
球面, 35
球面の曲率, 41

極小曲面, 43
極小値, 57
曲線の接ベクトル, 23
曲線の長さ, 24
曲線論, 23
極大値, 57
曲面の接ベクトル, 35
曲面の面積, 111
曲面論, 35, 142
曲率, 26, 39, 150

クラインの壺, 165
グリーンの定理, 121

計量ベクトル空間, 18
ゲージ, 99
ゲージ不変性, 99
ゲージ変換, 99
懸垂線, 48

高次元の幾何学, 47, 149
勾配, 53
勾配ベクトル場, 60
コダッチの方程式, 148
弧長, 24
コホモロジー, 136

●さ～そ

最大値の原理, 46
猿の腰掛け, 169
三角不等式, 11
3次元空間, 9
3次元ユークリッド空間, 9

仕事, 105
指数, 169
質量保存則, 74
射影平面, 165
重調和方程式, 95
従法線単位ベクトル, 26

- 主曲率, 41
 種数, 160
 主方向, 40
 主法線単位ベクトル, 26
 シュワルツの不等式, 11
 常螺旋, 24, 28
 常螺旋面, 42, 55
- 吸いこみ点, 60, 169
 数ベクトル, 9
 スカラー場, 81
 (スカラー場の) 線積分, 101
 (スカラー場の) 面積分, 112
 スカラー・ポテンシャル, 82
 ストークスの定理, 124, 135
- 正定値, 43
 積分路, 102
 接単位ベクトル, 24
 接平面の方程式, 56
 (曲線の) 接ベクトル, 23
 (曲面の) 接ベクトル, 35
 接ベクトル空間, 36
 線積分, 101, 105
 線素, 24
- 双曲放物面, 52, 57
 総熱量保存則, 130
 測地線方程式, 151
 測地的曲率, 155
- た〜と
- 第1基本形式, 37
 第1構造方程式, 147
 体積ひずみ, 95
 第2基本形式, 39
 第2構造方程式, 148
 楕円, 29
 楕円放物面, 42, 57
 単連結, 82, 135
- 抽象ベクトル空間, 17
 柱面, 55
 柱面の曲率, 41
 調和関数, 46
 直線の方程式, 22
 直交行列, 21, 50
- 定常解, 174
 展開図, 163
 電磁波, 74
- 電磁場テンソル, 98
 電磁場ポテンシャル, 98
- 等位面, 54
 トーラス, 52, 61, 160, 164
 特異点, 60, 169
 トポロジー, 61
- な〜の
- 内積, 10, 18
 内積空間, 18
 長さ, 10
 流れ, 77
 ナビアの式, 94
 ナブラ, 70
- ネーターの定理, 76
 熱方程式, 129
- 発散, 66
 発散定理, 127
 波動方程式, 72
- 微分形式, 95, 116
- 負定値, 43
 不動点, 174
 フレネ・セレの公式, 28, 31
- 閉曲面, 161, 168
 平均曲率, 41, 144
 平行四辺形の面積, 13
 平行六面体の体積, 14
 閉積分, 103
 平面曲線, 29
 ベクトル, 9
 ベクトル値関数, 15
 ベクトル場, 65, 169
 (ベクトル場の) 線積分, 105
 (ベクトル場の) 面積分, 113
 ベクトル・ポテンシャル, 85
 ヘッセ行列, 58, 63
 ヘルムホルツの定理, 93
 変分原理, 76
- ポアソンの方程式, 93
 ポアンカレの補題, 82, 85, 98, 130, 132
 方向微分, 54
 法単位ベクトル, 37
 放物線, 34
 法ベクトル, 54

220 索引

保存則, 74
保存力, 89
ホッジ-小平の定理, 100
ポテンシャル論, 81

●ま〜も

マクスウェル方程式, 72, 91

メビウスの帯, 161, 164
面積素, 111
面積分, 112, 113

●ら〜ろ

ラグランジュの未定乗数法, 39
ラプラシアン, 70
ラプラス方程式, 46

リー括弧積, 19, 20
リウビルの定理, 77
力学的エネルギー保存則, 108
臨界点, 57

振率 (れい率, ねじれ率), 27
レヴィ-チビタ接続, 151
連続の式, 74, 129

●わ

歪対称行列, 20
湧き出し点, 60, 169