

まえがき

本書は、工専や大学の工学部で中心的に学ぶであろう応用数学についてまとめたものです。世の中には数学の入門書はすでに無数に出版されており、その分野、記述法も多岐にわたっています。しかし、いくつかの分野を1冊にまとめた本というのは意外に少ないものです。もちろん皆無ではありませんが、ある分野についての内容がもの足りなかったり、あるいは内容は充実しているがあまりに分厚くて人を寄せつけなかったり(携帯に不便、高価である、数式を見ると吐き気がする・・・など理由は人それぞれですが)、というのが現状です。そこで、できるだけ多くの内容を含み、かつコンパクトにまとめたものを作る、というのが本書を書くに当たっての目標でした。ここでいうコンパクトとは、例題や証明を省いて達成せられるものであってはなりません。証明や基礎的な理論が好きでない人、必要だと思っていない人はたくさんいるでしょうが、なにせ我々は将来、未知の領域を開拓していかなければならないのですから、どこで何が役に立つか分かったものではありません。そこで、専門書すら省くような議論も数多く載せ、微分方程式の解の存在やフーリエ級数の収束性など、これをニヤニヤしながら読むのは一部のマニアだけだろうと思われるような事項も載せることにしました。とはいえ理論一辺倒ではなく、重要例題はきちんとおさえていますし、各章に偏微分方程式の解法をアツカッタ節をいくつか設けているので、“新しい道具を手に入れたことで新しい方程式が解けるようになる喜び”を感じてもらえれば幸いです。

本書は次の6つの章から構成されています。

- 第1章 行列
- 第2章 ベクトル解析
- 第3章 常微分方程式
- 第4章 複素関数論
- 第5章 フーリエ解析
- 第6章 ラプラス変換

これだけの量をこのページで?と思われるかもしれませんが、各章にいくつかの大きな目標を掲げ、できるだけ横道にそれるのは避けて流れるように議論を

4

進めていけば以外にその量は少ないものです。読者はその気になれば、1,2日で1つの章を読み終えることができるでしょう。各章の目標とは次のようなものです。

第1章 行列 は、応用上様々な場面で必要となる行列の対角化の習得を目標としています。第2章 ベクトル解析 は、前半は grad , div , rot 、後半は積分定理とポアンカレの定理 2.25 の理解を目標とします。これらが電磁気学や流体力学で中心的な役割を果たしていることは、例題を見てもらえれば分かると思います。第3章の目標はもちろん微分方程式が解けるようになることで、解の存在と一意性(3.7節) 以外は方程式の具体的な解法の話になっています。第4章 複素関数論 の前半は無級級数に関する定理、後半は留数定理の習得を目指します。第5章 は実際にフーリエ級数展開、フーリエ変換ができるようになること、それらを用いて偏微分方程式が解けるようになることを目標とします。第6章 ラプラス変換 は、第3章とは別の方法で常微分方程式が解けるようになること、特に第3章の方法では解くことができない、特殊な関数を含む方程式も解けることを理解して欲しいと思います。なお、本書は微分積分学の基本的な知識は既知とします。とはいえ、簡単な微分、積分と、ロピタルの定理やテイラー展開などの基礎事項を知っていれば十分に読み進めることができます。

最後に、忙しい中、原稿のチェックをしていただいた京都大学の谷村省吾先生と、同じく友人の白土君に感謝します。

2003年6月 千葉 逸人

改訂増補版のためのまえがき

改訂にあたっては、本文の一部を訂正し、新たに付録として「微分積分学のまとめとその応用」を書き加えました。当初は、本文を読んでいて公式を忘れたときに参照にできる公式集のようなものにするつもりでしたが、どの微積の本にも載っていることを書いても面白みに欠けると思い、少し高度な微積の知識とさらに進んだ様々な分野への応用例を数多く紹介することにしました。例題では本文中の内容も数多く扱っていますが、本文を読む前でもその都度参照いただければ十分読めるものと思います。

A.1～A.3 節では収束に関する正しい知識を得ることを目的とし、集合・位相の内容も少し扱いました。これらの節は少し難しく、次の節とは独立しているので飛ばして読んでもらっても構いません。A.4、A.5 節は微分と積分のまとめで、応用として本書よりも進んだ分野の内容を多く紹介しました。これについては参考文献もあわせて参照ください。

谷村省吾先生と友人の白土君には初版原稿に引き続き改訂追加部分の原稿にも目を通していただき、コメントをいただきました。この場を借りて心からお礼を申し上げます。

2004年9月 千葉 逸人

目次

第 1 章 行列	9
1.1 ベクトルと行列	9
1.2 掃き出し法	15
1.3 線形写像	17
1.4 直交行列・ユニタリ行列	19
1.5 固有値・固有ベクトル	21
1.6 対角化	26
第 2 章 ベクトル解析	35
2.1 ベクトル	35
2.2 ベクトル (値) 関数	40
2.3 曲線	41
2.4 曲面	45
2.5 勾配・発散・回転	49
2.6 線積分	56
2.7 面積分	60
2.8 積分定理	65
2.9 ポテンシャル	75
第 3 章 常微分方程式	87
3.1 序論	87
3.2 変数分離形	89
3.3 定数係数の 2 階線形方程式	96
3.4 完全微分方程式	107
3.5 連立微分方程式の初等的解法	111
3.6 べき級数法と特殊関数	117
3.7 解の存在と一意性の定理	130
3.8 行列の指数関数	147

3.9	偏微分方程式 1 ～特性曲線法～	153
第 4 章 複素関数論		155
4.1	複素数	155
4.2	数列の極限と無限級数	158
4.3	指数関数	165
4.4	その他の初等関数	168
4.5	複素関数の微分	171
4.6	複素線積分	176
4.7	ローラン級数展開	186
4.8	留数定理	192
4.9	解析接続とリーマン面	199
4.10	等角写像	207
4.11	偏微分方程式 2 ～調和関数とラプラス方程式～	215
第 5 章 フーリエ解析		227
5.1	フーリエ級数	227
5.2	フーリエ積分とフーリエ変換	237
5.3	収束性の証明と関連する諸定理	250
5.4	偏微分方程式 3 ～変数分離法～	260
5.5	偏微分方程式 4 ～フーリエ変換～	280
5.6	超関数	287
5.7	超関数のフーリエ解析	298
第 6 章 ラプラス変換		307
6.1	ラプラス変換	307
6.2	ラプラス変換の性質	311
6.3	ラプラス変換による常微分方程式の解法	320
6.4	ラプラス逆変換の求法	327
6.5	偏微分方程式 5 ～ラプラス変換～	340
付録 A 関数列の収束についてのまとめ		347
A.1	実数について	347

A.2	連続関数の性質	350
A.3	無限級数と項別微分・項別積分定理	357
A.4	微分法	363
A.5	積分法	382
	索引	389

索引

●欧文・記号

C^1 級関数 … 367
 div … 60
 grad … 57
 max … 346
 n 階微分方程式 … 89
 n 次元数ベクトル … 11
 n 次元数ベクトル空間 … 11
 rot … 61
 sup … 346
 Δ … 62
 ∇ … 59

●あ～お

安定性 … 371

 位置エネルギー … 82
 一次従属 … 25
 一次独立 … 25
 一次分数変換 … 212
 一様収束 … 171, 352
 1階線形方程式 … 94
 一致の定理 … 202
 一般解 … 91
 一般化された関数 … 287
 一般指数関数 … 177
 陰関数定理 … 375, 378

 渦 … 62
 裏 … 55
 運動方程式 … 49

 n 階微分方程式 … 89
 n 次元数ベクトル … 11
 n 次元数ベクトル空間 … 11
 エルミート行列 … 35
 円柱関数 … 130

 オイラーの公式 … 175

オイラー方程式 … 126
 大きさ … 13

●か～こ

(微分方程式の)解 … 89
 解曲線 … 113
 解曲面 … 156
 解析関数 … 188, 204
 解析接続 … 204
 解析接続の定理 … 203
 回転 … 61, 209
 回転ベクトル … 88
 解の安定性 … 371
 解の一意性定理 … 142
 解の存在定理 … 139
 拡大 … 209
 確定特異点 … 124
 確定特異点型方程式 … 124
 各点収束 … 350
 管状ベクトル場 … 84
 関数 … 348
 関数行列式 … 69
 関数要素 … 204
 完全微分 … 80
 完全微分方程式 … 109
 緩増加関数 … 299
 緩増加超関数 … 298
 完備化 … 345
 外積 … 47
 ガウシアン … 283
 ガウスの発散定理 … 74
 ガウス分布 … 351
 ガウス平面 … 163

 共役調和関数 … 181
 境界条件 … 217
 境界値問題 … 218
 極 … 193
 曲線 … 50
 極大延長解 … 143
 曲面 … 54

- 曲面積 … 55
 曲率 … 52
 虚軸 … 163
 虚部 … 163
 ギブスの現象 … 234, 255, 257
 逆行列 … 17
 行 … 13
 行列 … 13
 行列式 … 18
 行列の指数関数 … 149

 区分的になめらか … 231
 区分的に連続 … 231
 クロネッカーのデルタ … 32
 grad … 57
 グリーンの定理 … 71
 グロンウォールの不等式 … 141

 決定方程式 … 125

 コーシーの収束判定条件 … 167
 コーシーの積分公式 … 186
 コーシーの積分定理 … 183
 広義一様収束 … 355
 交代行列 … 16
 勾配 … 57
 項別積分 … 172, 357
 項別微分 … 171, 359
 公理 … 345
 弧長 … 50
 固定点 … 371
 固有多項式 … 33
 固有値 … 32
 固有ベクトル … 32
 固有方程式 … 33
 孤立特異点 … 190
 合成積 … 247, 290, 313

 ● さ～そ

 斉次形 … 89
 最大・最小値問題 … 374
 (条件付) 最大・最小値問題 … 378
 最大値・最小値の原理 … 349
 最大値の原理 … 219
 作用素ノルム … 135
 三角化 … 39
 三角関数 … 175
 三角行列 … 39

 指数関数 … 172
 始点 … 45

 写像 … 209, 348
 収束 … 166
 収束円 … 170
 収束座標 … 308
 収束半径 … 170
 収束半平面 … 308
 終点 … 45
 主値 … 177
 シュワルツ超関数 … 287
 シュワルツの不等式 … 57, 133
 初期曲線 … 156
 初期条件 … 90
 初期値問題 … 90
 真性特異点 … 193
 実数体 … 11
 実軸 … 163
 実対称行列 … 35
 実部 … 163
 実ベクトル … 11
 重調和関数 … 63
 純虚数 … 163
 準線形方程式 … 155
 上限 … 346
 常微分方程式 … 89

 スカラー … 11
 スカラー三重積 … 48
 スカラー積 … 46
 スカラー場 … 49
 スカラー場の線積分 … 64
 スカラー場の面積分 … 68
 スカラー・ポテンシャル 79
 ストークスの定理 … 77
 随伴行列 … 31

 正規型の方程式 … 89
 正規行列 … 35
 正規直交系 … 30
 正接関数 … 176
 正則 … 178
 正則化 … 290
 正則行列 … 17
 正定値 … 374
 正の向き … 55
 正方向行列 … 15
 積分因子 … 111
 積分記号化の微分 … 360
 積分順序の交換 … 360
 積分路 … 64
 接線単位ベクトル … 52
 接平面 … 366
 線形方程式 … 89

- 線形写像 … 28
 線積分 … 64
 線素 … 51
 絶対可積分 … 239
 絶対収束 … 355
 絶対収束級数 … 169
 絶対収束座標 … 308
 絶対値 … 13, 164
 零行列 … 15
 零ベクトル … 11
 漸近安定 … 371
 全微分 … 366
- 双曲線正弦関数 … 176
 双曲線余弦関数 … 176
 相似 … 34
 層状ベクトル場 … 79
 像 … 209
- た〜と
- 対角化 … 37
 対角化行列 … 37
 対角行列 … 15
 対角成分 … 15
 帯球関数 … 123
 対称行列 … 16
 対数関数 … 177
 対数分岐点 … 206
 体積ひずみ … 88
 多価関数 … 176, 205
 たたみこみ … 247
 単位階段関数 … 241
 単位行列 … 15
 単純閉曲線 … 71
 単連結領域 … 79
 大域解 … 143
 第1種ベッセル関数 … 130
 代数分岐点 … 206
 div … 60
 ダランベールの解 … 161, 282
 断熱境界条件 … 268
- 値域 … 348
 中間値の定理 … 349
 超関数 … 288
 調和関数 … 181, 218
 直交行列 … 32
 直交系 … 30
 (ベッセル関数の)直交性 … 131
 直交変換 … 31
 定義域 … 348
- テイラー展開 … 188, 363
 (多変数の)テイラー展開 … 367, 368
 テイラーの公式 … 363
 テスト関数 … 288
 転置行列 … 16
 ディリクレ問題 … 218
 Δ … 62
 デルタ関数 … 287, 290
 電磁ポテンシャル … 87
- 等位面 … 57
 等角写像 … 210
 特異解 … 97
 特異点 … 190, 193
 特殊解 … 91
 特性基礎曲線 … 156
 特性曲線 … 156
 特性方程式 … 99
 導関数 … 178, 362
 同次形 … 89
 ド・モアブルの公式 … 166
- な〜の
- 内積 … 13, 46
 ナビアの式 … 63, 87
 ∇ … 59
 ナブラ … 59
- 2階線形方程式 … 98
 二項係数 … 206
- ねじれ率 … 53
 熱核 … 283
 熱伝導方程式 … 260, 280, 337
- 除きうる特異点 … 194
 ノルム … 132
- は〜ほ
- 発散 … 60
 波動方程式 … 63, 159, 260, 281, 342
 ハミルトン・ケリーの定理 … 44
 汎関数 … 287
 半正定値 … 374
 反転 … 209
 半負定値 … 374
- 非斉次形 … 89
 非線形方程式 … 90
 左極大延長解 … 143

- 非同次形 … 89
 非負定値 … 374
 表現行列 … 29
 微分 … 49, 178
 微分形式 … 70
 微分係数 … 362
 微分方程式 … 89

 フーリエ級数 … 231
 フーリエ逆変換 … 242
 フーリエ係数 … 231
 フーリエ正弦級数 … 236
 フーリエ積分 … 238
 フーリエ変換 … 242
 フーリエ余弦級数 … 236
 不安定 … 371
 複素共役 … 164
 複素数 … 163
 複素数体 … 11
 複素線積分 … 182
 複素内積 … 13
 複素フーリエ級数 … 231
 複素平面 … 163
 複素ベクトル … 11
 符号関数 … 296
 負定値 … 374
 不動点 … 371
 負の向き … 55
 フルネ・セレの公式 … 53
 フロベニウスの定理 … 43
 部分分数展開 … 325
 部分列 … 347
 部分和 … 168
 ブラウン運動 … 357
 分岐 … 207
 分岐点 … 206

 閉曲線 … 65
 平均値の定理 … 363
 平行移動 … 209
 平衡点 … 371
 閉積分 … 65
 ヘッセ行列 … 368
 ヘビサイド関数 … 241
 ヘビサイドの展開定理 … 328
 ヘルムホルツの定理 … 87
 偏角 … 164
 変換 … 209
 変数分離形 … 91
 変数変換 … 369
 偏導関数 … 365
 偏微分方程式 … 89

 べき級数 … 170
 ベクトル … 11, 45
 ベクトル関数 … 49
 ベクトル三重積 … 48
 ベクトル積 … 47
 ベクトル場 … 49
 ベクトル場の線積分 … 66
 ベクトル場の面積分 … 68
 ベクトル方程式 … 50
 ベクトル・ポテンシャル 84
 ベクトル面積素 … 55
 ベッセルの不等式 … 250
 ベッセルの方程式 … 128
 ベルヌーイ型方程式 … 96

 方向微分係数 … 58
 保存力 … 82
 ポアソンの求和式 … 303
 ポアソンの積分公式 … 225
 ポアソンの方程式 … 87
 ポアンカレの定理 … 81
 ポテンシャル … 79

 ●ま〜も

 右極大延長解 … 143
 右手系 … 47

 無限級数 … 168
 無限多価関数 … 177

 面積素 … 55
 面積分 … 67

 モレラの定理 … 189

 ●や〜よ

 ヤコビアン … 69
 ヤコビ行列 … 368

 ユークリッド・ノルム … 132
 優級数 … 169
 ユニタリ行列 … 32
 ユニタリ変換 … 31

 余因子行列 … 24
 余因子展開 … 23

 ●ら〜ろ

 ライブニッツの公式 … 364

ラグランジュの時間微分 … 63
ラブラシアン … 62
ラプラス逆変換 … 305, 329
ラプラス変換 … 305
ラプラス方程式 … 181, 217, 260, 283

リプシッツ条件 … 138
リプシッツ連続 … 138
留数 … 195
留数定理 … 195

ルジャンドル関数 … 123
ルジャンドル多項式 … 123
ルジャンドルの方程式 … 122

零点 … 194
零点孤立の原理 … 202
れい率 … 53
列 … 13
列ベクトル … 14
連続 … 348
連続の式 … 60, 76
連立微分方程式 … 113

rot … 61
ローラン級数展開 … 191
ロピタルの定理 … 365
ロンメル積分公式 … 131

●わ

ワイエルシュトラスの近似定理 … 353