

# Approximation of Vector Fields on the RG Method and its Application to the Synchronization

千葉逸人 (Hayato CHIBA) <sup>\*1</sup>

京都大学 情報学研究科 数理工学専攻

概要: くりこみ群の方法は常微分方程式に対する特異摂動法の一つであり、与えられた方程式の近似解を長い時間スケールで構成することができる。近年、くりこみ群の方法は単に近似解のみならず近似ベクトル場を構成することが明らかとなり、これにより不変多様体の存在とその安定性なども議論できるようになった。ここではくりこみ群の方法の数学的定式化とその結合振動子系への応用を紹介したい。

## 1 はじめに

ここでのくりこみ群の方法とは Chen, Goldenfeld, Oono [1,2] によって提案された常微分方程式に対する特異摂動法の一つであり、与えられた方程式の厳密解に対する近似解を良い精度で構成するばかりでなく、それまでに知られていた古典的摂動法を特別な場合として含むため近年注目を浴びている。

歴史的な経緯を簡単に紹介しよう。くりこみ群の方法はくりこみ群方程式と呼ばれる補助的な方程式を介してから近似解を構成するのが特徴である。Chen らの原論文によると、素朴な摂動法 (後述) によって現れる永年項を除去するための条件としてくりこみ群方程式を導出しているようにも見えるが、その数学的定義や指導原理は不透明であった。この点を明確にしたのが Kunihiko [9,10] である。

Kunihiko は、素朴な摂動法によって構成した“悪い”近似解の族に対する包絡線を与えるための方程式としてくりこみ群方程式を特徴づけた。このアイデアはくりこみ群の方法が良い近似解を与える理由の直観的な理解を助ける。ただし、本当にくりこみ群の方法で構成した近似解がもとの方程式の厳密解を近似していることの証明は、Ziane [11], DeVille *et. al* [7], Chiba [4] まで待たなければならない。

Kunihiko のアイデアはくりこみ群の方法に明確な指導原理を与えたが、依然として以下のような課題が残っていた。

(i) くりこみ群方程式の具体的な定義式が分からない。

---

<sup>\*1</sup> E mail address : [chiba@amp.i.kyoto-u.ac.jp](mailto:chiba@amp.i.kyoto-u.ac.jp)

(ii) 不変多様体の存在とその安定性が議論できない。

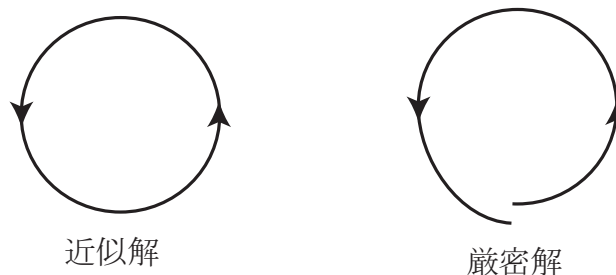
(i) について、Kunihiro の指導原理に基づいてくりこみ群方程式を具体的に書き下すには素朴な摂動法による “悪い” 近似解を書き下す必要があるが、これは (具体的な例に対しては簡単であるが、一般の方程式に対しては) 以外にも困難である。この問題は Ziane [11], DeVille *et. al* [7], Chiba [3] によって解決された。Ziane [11], DeVille *et. al* [7] は averaging operator を用いることによって 1 次の永年項の定義を与え、これを用いて 1 次のくりこみ群方程式の明確な定義を与えた。これに触発されて Chiba [3] は任意次数までの “悪い” 近似解を構成し、その族の包絡線を計算することで任意次数のくりこみ群方程式を書き下すことに成功した。この定義式を用いれば、Mathematica 等を用いることで比較的高い次数までのくりこみ群方程式を簡単に求めることができる。

課題 (i) が計算上の問題であったのに対し、課題 (ii) はより本質的である。すでに述べたように、くりこみ群の方法が与えられた方程式の厳密解を良く近似する近似解を構成することは Ziane [11], DeVille *et. al* [7], Chiba [4] によって示されているが、より具体的には次の事実が示されている。今、与えられた方程式の厳密解を  $x(t)$ 、 $m$  次のくりこみ群の方法で構成した近似解を  $\tilde{x}(t)$  とするとき、適当な条件のもと次が成り立つ。

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| < C\varepsilon^m, \text{ for } 0 < t < T/\varepsilon. \quad (1)$$

ここで  $\varepsilon$  は方程式に含まれる、摂動の強さを表す微小パラメータであり、 $C, T$  はある正の定数である。正確な statement は本稿の Thm.12 を参照せよ。

さて、課題 (ii) の意味するところは次のようである。もしくりこみ群の方法により構成した近似解が周期軌道であったとしよう。ところが厳密解は近似解から  $\varepsilon^m$  程度ずれているため、厳密解のほうでは周期軌道になっていないかもしれない (下図)。

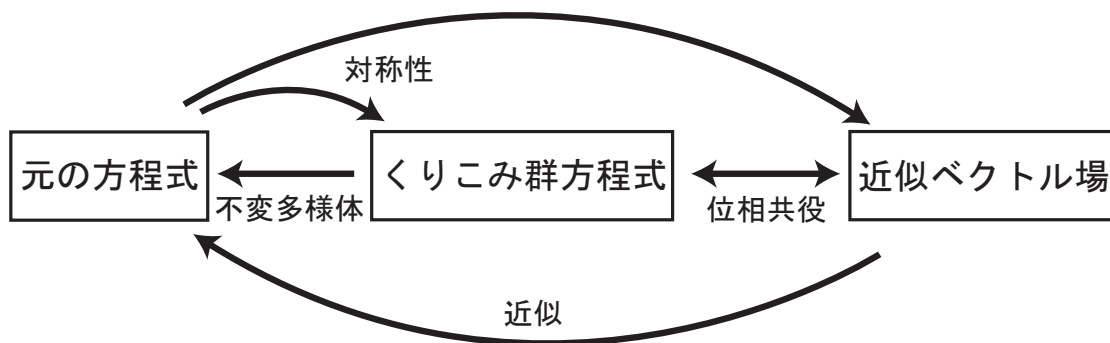


逆に近似解が周期軌道になっていなくとも、厳密解は周期軌道になるようなことがあるかもしれない。より一般に、くりこみ群の方法で構成した近似解は誤差を含むため、もとの方程式が持つ不変多様体の存在を示せるかどうかは明らかではない。さらに、仮に不変多様体の存在を言うことができたとしても、その安定性を議論することができない。というのも、安定性は  $t \rightarrow \infty$  における漸近挙動に関する性質であるが、くりこみ群の方法で構

成した近似解の有効範囲は有限の時刻  $T/\varepsilon$  までである。不変多様体の存在とその安定性について議論できないのは、方程式の位相的な性質を調べることを目的とする力学系理論にとって致命的な欠陥である。

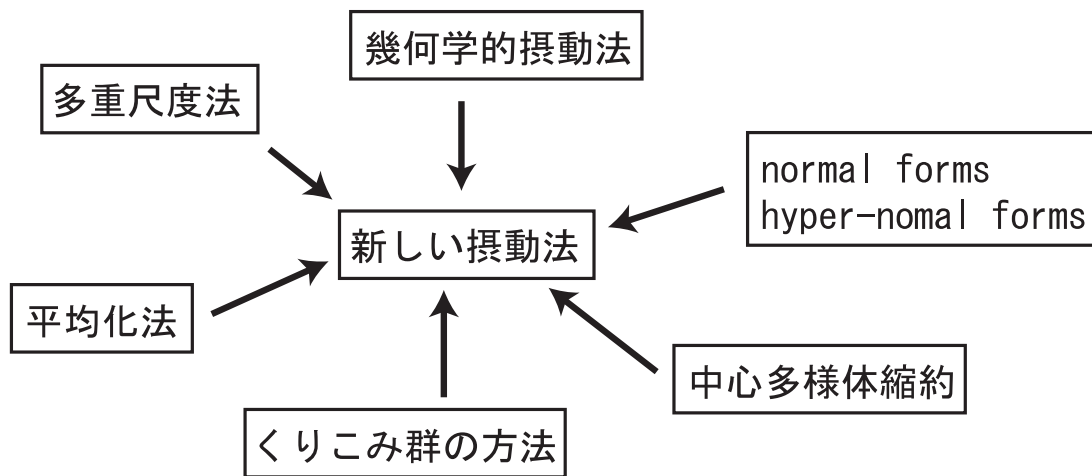
この問題は Chiba [3] によって解決された。そのアイデアは次のようなものである。従来、くりこみ群の方法は1つの厳密解に対する1つの近似解を構成するのが目的であったが、初期値をいろいろに動かすことで得られる近似解の族を考え、その族が well-defined なベクトル場 (あるいは flow) を定義するかどうかを考える。言い換えれば、近似解の族が満たすべき微分方程式が存在するかどうかを考えるのである。一般には近似解同士が交わる (したがって解の一意性が破れる) 可能性もあるためこれは決して自明ではないが、Chiba は適当な条件のもと、近似解の族が正しくベクトル場を定義することを示した (Thm.11)。これは、くりこみ群の方法は近似解だけでなく近似ベクトル場を構成する理論であることを主張する。いったん近似ベクトル場を構成してしまえば力学系理論のいろいろな定理が使えるので便利である。特に不変多様体論を援用することにより、もしくりこみ群方程式が法双曲型不変多様体  $N_\varepsilon$  を持つならば、元の方程式も  $N_\varepsilon$  と微分同相な不変多様体を持ち、さらにそれらの安定性が一致することを示すことができる (Thm.13)。すなわちくりこみ群方程式の位相的性質から元の方程式の位相的性質が従う。そこでくりこみ群方程式が元の方程式よりも “ 解きやすい ” ことを期待したいが、実際、元の方程式が持つ対称性 (Lie 群による不変性) は全てくりこみ群方程式に遺伝し、かつくりこみ群方程式は元の方程式の非摂動部分の flow が定義する 1-パラメータ群の作用で不変であることが示される (Thm.14)。したがって一般にくりこみ群方程式は元の方程式よりも対称性を多く持ち、元の方程式よりも解析が容易である。

以下の図式がくりこみ群の方法の “ まとめ ” である。



くりこみ群の方法が従来の古典的摂動法を特別な場合として含むことは Chen, Goldenfeld, Oono [1,2] によってすでに示唆されていたが、中心多様体を近似的に構成できることをはじめて明確に主張したのは Ei, Fujii, Kunihiro [8] である。この事実は、やはり不変多様体論を援用することで Chiba [5] によって厳密に証明された。またくりこみ群方程式

がベクトル場の標準形 (normal forms) と一致することは DeVille *et. al* [7] によって低次の場合に示され、Chiba [4] が一般の次数に対しても示した。さらに Chiba [4] ではくりこみ群方程式の非一意性に着目し、hyper-normal forms と同値な理論を構成できることを示している。他にも、多重尺度法 (multi-scaling method)、平均化法 (averaging method)、幾何学的摂動法 (geometric singular perturbation) を特別な場合として含むことが分かっている (Chiba [6])。注意しなければならないのは、くりこみ群の方法を平均化法をとりこむ形で一般化したとき、くりこみ群方程式はもはや永年項を除去するための方程式でも包絡線を作るための方程式でもなくなることである。この意味において、くりこみ群方程式が従来の摂動法を特別な場合として含むというよりも、くりこみ群の方法さえも特別な場合として含む "The" singular perturbation が存在する、と言ったほうがいいのかもしい。



## 2 準備

本稿で用いられる数学の用語と定理の準備をしておく。

$f$  を  $C^r$  多様体  $M$  上の時間に依存しない  $C^r$  ベクトル場とする。初期時刻  $t = 0$  に初期値  $x_0$  を通る方程式  $\dot{x} = f(x)$  の解を  $\varphi_t(x_0)$  と表すとき、 $\varphi : \mathbf{R} \times M \rightarrow M$  を  $f$  の **flow** (流れ) と呼ぶ。  $\varphi_t : M \rightarrow M$  は各  $t$  に対して  $M$  上の  $C^r$  微分同相であり、関係式  $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ ,  $\varphi_0 = id_M$  を満たす。ここで  $id_M$  は  $M$  上の恒等写像である。本稿では  $\varphi_t$  は全ての  $t \in \mathbf{R}$  に対して定義可能である (すなわちベクトル場  $f$  は完備である) と仮定する。

時間に依存する  $C^r$  ベクトル場  $f(t, x)$  に対し、初期時刻  $t = \tau$  に初期値  $x_0$  を通る方程式  $\dot{x} = f(t, x)$  の解を  $\varphi_{t,\tau}(x_0)$  と表すとき、 $\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times M \rightarrow M$  を  $f(t, x)$  の **flow** (流れ) と呼ぶ。各  $t, \tau \in \mathbf{R}$  に対して  $\varphi_{t,\tau} : M \rightarrow M$  は  $M$  上の微分同相であり、

$$\varphi_{t,t'} \circ \varphi_{t',\tau} = \varphi_{t,\tau}, \quad \varphi_{t,t} = id_M \tag{2}$$

を満たす。

逆に  $M$  上の微分同相写像の族  $\varphi_{t,\tau}$  で全ての  $t, \tau \in \mathbf{R}$  に対して上式を満たすものが存在するとき、 $M$  上の時間に依存するベクトル場  $f$  を

$$f(t, x) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=t} \varphi_{\tau,t}(x) \quad (3)$$

で定義することができる。

**Definition 1.**  $f$  を  $M$  上の時間に依存しない  $C^r$  ベクトル場とし、 $\varphi_t$  をその flow とする。 $M$  の部分多様体  $N$  が全ての  $t \in \mathbf{R}$  に対して  $\varphi_t(N) = N$  を満たすとき、 $N$  は  $f$ -不変であるという。 $f$ -不変多様体  $N$  は以下の条件を満たすとき双曲型 (**hyperbolic**) であるという：ある  $N$  上のベクトルバンドル  $E^s, E^u$  が存在して

(i)  $TM|_N = E^s \oplus E^u \oplus TN$ ,

(ii)  $E^s \oplus TN$  と  $E^u \oplus TN$  は共に  $D\varphi_t$ -不変,

(iii) ある定数  $C \geq 1, \alpha, \beta > 0$  が存在して全ての  $p \in N$  に対して

$$v \in E_p^s \Rightarrow \|\pi^s \circ (D\varphi_t)_p v\| \leq C e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$v \in E_p^u \Rightarrow \|\pi^u \circ (D\varphi_{-t})_p v\| \leq C e^{-\beta t}, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

が成り立つ。ここで  $\pi^s, \pi^u$  はそれぞれ  $TM|_N$  から  $E^s, E^u$  への射影を表す。

**Definition 2.** 双曲型不変多様体  $N$  は以下の条件を満たすとき法双曲型 (**normally hyperbolic**) であるという：ある整数  $r \geq 1$  と定数  $C \geq 1, \gamma > 0$  が存在して、全ての  $p \in N, v \in E_p^s, w \in E_p^u, u \in T_p N$  に対して次の不等式が成り立つ。

$$\|(D\varphi_t)_p u\|^k \|\pi^s \circ (D\varphi_t)_p v\| \leq C e^{-\gamma t} \|u\|^k \|v\|, \quad k = 0, 1, \dots, r, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$\|(D\varphi_{-t})_p u\|^k \|\pi^u \circ (D\varphi_{-t})_p w\| \leq C e^{-\gamma t} \|u\|^k \|w\|, \quad k = 0, 1, \dots, r, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

次の定理が不変多様体論における基礎定理である。

**Theorem 3. (Fenichel)**

$M$  を  $C^r$  多様体 ( $r \geq 1$ )、 $X(M)$  を  $M$  上の  $C^r$  ベクトル場の全体に  $C^1$  位相を入れた空間とする。 $f \in X(M)$  とし、 $N \subset M$  をコンパクトかつ連結な法双曲型  $f$ -不変多様体とする。このとき、 $f$  の開近傍  $\mathcal{U} \subset X(M)$  で以下を満たすものが存在する：任意の  $g \in \mathcal{U}$  に対して  $N$  の近傍に法双曲型  $g$ -不変多様体  $N_g \subset M$  が唯一つ存在し、特に  $N$  と  $N_g$  は微分同相でそれらの安定性は一致する。

中心多様体定理について述べておく。

**Definition 4.**  $\varphi_t$  を多様体  $M$  上のベクトル場の flow とする。部分多様体  $N \subset M$  について、各点  $x \in N$  に対してある数  $T = T(x) > 0$  が存在して  $\{\varphi_t(x) \mid -T < t < T\} \subset N$  が成り立つとき、 $N$  を局所不変多様体 (**locally invariant manifold**) という。

**Theorem 5.** [14] 次の系を考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y), & x \in \mathbf{R}^n, \\ \dot{y} = By + g(x, y), & y \in \mathbf{R}^m. \end{cases} \quad (8)$$

ここで  $A$  と  $B$  は定行列で、 $A$  の全ての固有値は虚軸上にあり、 $B$  の全ての固有値は左半平面にあるものとする。 $f$  と  $g$  は  $C^2$  ベクトル場であり原点においてその値とその導関数の値が消えるものとする。このとき、ある  $n$  次元の局所不変多様体で原点において  $x$  平面に接するものが存在する。これを局所中心多様体 (**local center manifold**) と呼ぶ。

### 3 くりこみ群の方法

くりこみ群の方法の一般論について概説しよう。次の  $\mathbf{R}^n$  上の常微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + \varepsilon g(t, x, \varepsilon) \\ &= Fx + \varepsilon g_1(t, x) + \varepsilon^2 g_2(t, x) + \cdots, \quad x \in \mathbf{R}^n, \end{aligned} \quad (9)$$

を考える。ここで  $\varepsilon \in \mathbf{R}$  は微小なパラメータである。これに対して以下の仮定を設ける。

- (A1)  $F$  は対角化可能な  $n \times n$  の定行列であり、その全ての固有値は虚軸上にあるとする。
- (A2)  $g(t, x, \varepsilon)$  は時間に依存する  $\mathbf{R}^n$  上のベクトル場であり、 $t, x, \varepsilon$  について  $C^\infty$  であってその  $\varepsilon$  についてのべき級数展開は式 (9) のように与えられるものとする。
- (A3) 各  $g_i(t, x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) は  $t$  について周期関数、 $x$  について多項式であるとする。

**Remark 6.** 仮定 (A1) は弱めることができ、 $F$  が固有値を左半平面に持つときにもくりこみ群の方法は適用できる。このときは中心多様体縮約が可能である (本稿 Sec.5)。また (A3) は次の (A3') に置き換えることができる。

(A3')  $g_i(t, x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) は  $x$  について一様な  $t$  についての概周期関数であり、これらの Fourier 指数の全体は  $\mathbf{R}$  上に集積点を持たない。

$g_i$  の Fourier 指数が集積点を持つ場合には以下で定義するくりこみ群変換が  $t \rightarrow \infty$  で発散してしまう可能性がある。詳細は Chiba [3] を参照せよ。

さて、式 (9) に対してその解が  $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots$  と書けるとしてこれを式 (9) に

代入すると

$$\dot{x}_0 + \varepsilon \dot{x}_1 + \varepsilon^2 \dot{x}_2 + \cdots = F(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i g_i(t, x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots) \quad (10)$$

なる式を得る。右辺を  $\varepsilon$  について展開した後、両辺を  $\varepsilon$  のべきで比較して得られる方程式の系を

$$\dot{x}_0 = Fx_0, \quad (11)$$

$$\dot{x}_1 = Fx_1 + G_1(t, x_0), \quad (12)$$

⋮

$$\dot{x}_i = Fx_i + G_i(t, x_0, x_1, \dots, x_{i-1}), \quad (13)$$

⋮

としよう。ここで全ての方程式は非同次形の線形方程式であることに注意せよ。非同次項  $G_i$  は  $t, x_0, x_1, \dots, x_{i-1}$  についての滑らかな関数であり、例えば  $G_1, G_2, G_3, G_4$  は以下で与えられる。

$$G_1(t, x_0) = g_1(t, x_0), \quad (14)$$

$$G_2(t, x_0, x_1) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(t, x_0)x_1 + g_2(t, x_0), \quad (15)$$

$$G_3(t, x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(t, x_0)x_1^2 + \frac{\partial g_1}{\partial x}(t, x_0)x_2 + \frac{\partial g_2}{\partial x}(t, x_0)x_1 + g_3(t, x_0), \quad (16)$$

$$G_4(t, x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_1}{\partial x^3}(t, x_0)x_1^3 + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(t, x_0)x_1x_2 + \frac{\partial g_1}{\partial x}(t, x_0)x_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(t, x_0)x_1^2 + \frac{\partial g_2}{\partial x}(t, x_0)x_2 + \frac{\partial g_3}{\partial x}(t, x_0)x_1 + g_4(t, x_0). \quad (17)$$

上の方程式系を解いて曲線  $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots$  を構成することを素朴な摂動法という。この曲線は一般には永年項と呼ばれる発散する項を含み、 $t \sim O(1)$  程度の時間スケールでしか厳密解を近似しない。Sec.1 ではこれを“悪い”近似解と呼んだ。Kunihiro の原理に従えば、“悪い”近似解の族の包絡線を定義するための方程式としてくりこみ群方程式が得られる。したがってまずは“悪い”近似解を(望ましい形で)具体的に書き下す必要があるが、これは以下のようにして得られる。

以下では行列  $F$  の基本行列  $e^{Ft}$  を単に  $X(t)$  と書く。まず、 $\mathbf{R}^n$  上の関数  $R_i(y), h_i^{(i)}(y), i =$

1, 2, \dots を

$$R_1(y) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int^t X(s)^{-1} G_1(s, X(s)y) ds, \quad (18)$$

$$h_t^{(1)}(y) := X(t) \int^t (X(s)^{-1} G_1(s, X(s)y) - R_1(y)) ds, \quad (19)$$

$$R_i(y) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int^t (X(s)^{-1} G_i(s, X(s)y, h_s^{(1)}(y), \dots, h_s^{(i-1)}(y)) - X(s)^{-1} \sum_{k=1}^{i-1} (Dh_s^{(k)})_y R_{i-k}(y)) ds, \quad i = 2, 3, \dots, \quad (20)$$

$$h_t^{(i)}(y) := X(t) \int^t (X(s)^{-1} G_i(s, X(s)y, h_s^{(1)}(y), \dots, h_s^{(i-1)}(y)) - X(s)^{-1} \sum_{k=1}^{i-1} (Dh_s^{(k)})_y R_{i-k}(y) - R_i(y)) ds \quad i = 2, 3, \dots, \quad (21)$$

で定義する。このとき次が成り立つ。

**Proposition 7. (Chiba [3])**  $y \in \mathbf{R}^n$  を初期値とする式 (11) の解を  $x_0(t) = X(t)y$  とする。このとき、任意の  $y \in \mathbf{R}^n$ ,  $\tau \in \mathbf{R}$  と  $i = 1, 2, \dots$  に対して次の曲線

$$x_i := x_i(t, \tau; y) = h_t^{(i)}(y) + p_1^{(i)}(t, y)(t - \tau) + p_2^{(i)}(t, y)(t - \tau)^2 + \dots + p_i^{(i)}(t, y)(t - \tau)^i \quad (22)$$

は式 (13) の解を与える。ここで  $p_1^{(i)}, \dots, p_i^{(i)}$  は

$$p_1^{(i)}(t, y) = X(t)R_i(y) + \sum_{k=1}^{i-1} (Dh_t^{(k)})_y R_{i-k}(y), \quad (23)$$

$$p_j^{(i)}(t, y) = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial p_{j-1}^{(k)}}{\partial y}(t, y) R_{i-k}(y), \quad (j = 2, 3, \dots, i-1), \quad (24)$$

$$p_i^{(i)}(t, y) = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial p_{i-1}^{(k)}}{\partial y}(t, y) R_{i-k}(y) = \frac{1}{i} \frac{\partial p_{i-1}^{(i-1)}}{\partial y}(t, y) R_1(y), \quad (25)$$

$$p_j^{(i)}(t, y) = 0, \quad (j > i). \quad (26)$$

で定義される。また  $h_t^{(i)}(y)$  は  $t$  について一様有界である。

**Remark 8.**  $h_t^{(i)}$  が  $t$  について一様有界であるから、結局式 (13) の解を  $t$  について有界な部分と多項式の速さで発散する部分に分けて書き下したことになる。特に 1 次関数の部分  $p_1^{(i)}(t, y)(t - \tau)$  を永年項と呼ぶ。  $y$  は式 (11) の解の初期値から生じるパラメータであり、  $\tau$



は初期時刻の自由度から生じるパラメータだと思えばよい。  $G_i$  が

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \frac{\partial G_{i-1}}{\partial x_{j-1}} = \dots = \frac{\partial G_{i-j}}{\partial x_0}, \quad i > j \geq 0 \quad (27)$$

という関係式を満たすことに気づけば、この proposition は式 (22) を式 (13) に代入することで証明できる。なぜ  $R_i, h_i^{(i)}$  の定義式に極限操作が現れるのかを見るために、  $i = 1$  に対して式 (22) を導出してみよう。0 次の方程式 (11) の解を  $x_0(t) = X(t)y$  とするとき、1 次の方程式 (12) は

$$\dot{x}_1 = Fx_1 + G_1(t, X(t)y) \quad (28)$$

と書ける。よく知られているように、  $h$  を初期値、  $\tau$  を初期時刻とするこの方程式の一般解は

$$x_1 = X(t)X(\tau)^{-1}h + X(t) \int_{\tau}^t X(s)^{-1}G_1(s, X(s)y)ds \quad (29)$$

と書ける。仮定 (A1), (A3)、あるいは (A3') より右辺の被積分関数は概周期関数であるが、特に (Fourier 級数展開を思い出せば分かるように) 「(定数項) + (真に概周期的な項)」の形に書くことができる。定数項を積分すると 1 次関数が生じ、これがいわゆる永年項である。一方、真に概周期的な項の積分はやはり概周期関数である (ここで  $G_1$  の Fourier 指数が  $\mathbf{R}$  上に集積点を持たないという仮定が使われる)。我々の目的は上式右辺を発散項 (永年項) と  $t$  について有界な項に分けて書くことである。右辺の積分は「(1 次関数) + (概周期関数)」であるから、これを  $t$  で割って  $t \rightarrow \infty$  の極限をとれば概周期部分は落ちて、1 次関数の係数、すなわち永年項の係数だけが生き残る。これが  $R_1(y)$  である。一方、  $t$  について有界な部分を得るには永年項を差し引けばよいから上式の  $x_1$  を

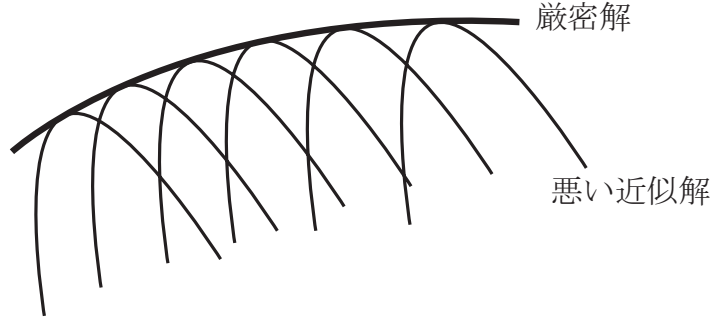
$$x_1 = X(t)X(\tau)^{-1}h + X(t) \int_{\tau}^t (X(s)^{-1}G_1(s, X(s)y) - R_1(y))ds + X(t)R_1(y)(t - \tau) \quad (30)$$

と書きなおす。ここで  $h_t^{(1)}$  を式 (19) で定義し、上式の  $h$  に  $h = h_t^{(1)}(y)$  を代入すれば

$$x_1 = h_t^{(1)}(y) + X(t)R_1(y)(t - \tau). \quad (31)$$

となって式 (22) が得られる。

さて、1 次までの“悪い”近似解が  $x(t, \tau, y) = X(t)y + \varepsilon(h_t^{(1)}(y) + X(t)R_1(y)(t - \tau))$  で与えられることが分かった。Kunihiro の原理に従って  $\tau$  をパラメータとするこの曲線族の包絡線を計算しよう。ただし初期値を決定するパラメータ  $y$  も初期時刻  $\tau$  を動かすごとに厳密解に沿って動かすことにする (下図)。



そうすれば包絡線が厳密解を与えることが期待できるであろう。そこで  $y = y(\tau)$  とおく。包絡線は以下の手順で計算される。まず、悪い近似解の族をパラメータ  $\tau = t$  で微分してそれが零になることを要求する。

$$\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=t} x(t, \tau, y(\tau)) = X(t) \frac{dy}{dt}(t) + \varepsilon \left( \frac{\partial h_t^{(1)}}{\partial y} \frac{dy}{dt}(t) - X(t) R_1(y) \right) = 0. \quad (32)$$

ここで

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon R_1(y) + O(\varepsilon^2) \quad (33)$$

とおけば上式の等式が満たされることが確認できる。この方程式の解を  $y(t)$  とするとき、包絡線は

$$x(t, t, y(t)) = X(t)y(t) + \varepsilon h_t^{(1)}(y(t)) \quad (34)$$

で与えられる。1 次の場合のみを計算したが、高次の場合も同様に計算することで次の定義に辿りつく。

**Definition 9.** 式 (18) ~ (21) で定義される  $R_i(y)$ ,  $h_t^{(i)}(y)$  を用いて、式 (9) に対する  $m$  次のくりこみ群方程式 (RG equation) を

$$\dot{y} = \varepsilon R_1(y) + \varepsilon^2 R_2(y) + \cdots + \varepsilon^m R_m(y), \quad y \in \mathbf{R}^n, \quad (35)$$

で定義し、 $m$  次のくりこみ群変換 (RG transformation)  $\alpha_t : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  を

$$\alpha_t(y) = X(t)y + \varepsilon h_t^{(1)}(y) + \cdots + \varepsilon^m h_t^{(m)}(y), \quad (36)$$

で定義する。

**Remark 10.** 行列  $X(t) = e^{Ft}$  は非特異であり、また関数  $h_t^{(1)}(A), \dots, h_t^{(m)}(A)$  は  $t \in \mathbf{R}$  について一様に有界であるから、 $|\varepsilon|$  が十分小さいとき、ある原点の開近傍  $U = U(\varepsilon)$  で  $\bar{U}$  がコンパクトかつ  $\alpha_t$  の  $U$  への制限が  $U$  から  $\mathbf{R}^n$  の中への微分同相を与えるようなものが存在する (これは  $C^1$  微分同相の全体は開集合であるという事実から従う)。一般に、 $|\varepsilon|$  を小

さく取ればとるほど  $U = U(\varepsilon)$  は大きくとれる。この  $U$  がくりこみ群の方法の適用可能な領域を与えるので、応用上  $U$  の大きさを見積もることが必要なことも多い。

以上で近似解の構成法のアイデアが分かったが、実際には Sec.1 で述べたように、不変多様体について議論するために近似ベクトル場の存在を言いたい。次の一連の定理がくりこみ群の方法の基礎定理である。

**Theorem 11. (Approximation of Vector Fields, [3])**

$\varphi_t^{RG}$  を式 (9) に対する  $m$  次のくりこみ群方程式の flow とし、 $\alpha_t$  を  $m$  次のくりこみ群変換とする。このとき、ある正の定数  $\varepsilon_0$  が存在して  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  なる任意の  $\varepsilon$  に対して以下が成り立つ：

(i) 次で定義される写像

$$\Phi_{t,t_0} := \alpha_t \circ \varphi_{t-t_0}^{RG} \circ \alpha_{t_0}^{-1} : \alpha_{t_0}(U) \rightarrow \mathbf{R}^n \quad (37)$$

は各  $t_0 \in \mathbf{R}$  に対して  $\alpha_{t_0}(U)$  上で定義された flow を定める。ここで  $U = U(\varepsilon)$  は  $\alpha_{t_0}$  が微分同相となるような原点の開近傍である (Rem.10)。この flow  $\Phi_{t,t_0}$  は時間に依存するベクトル場

$$F_\varepsilon(t, x) := \left. \frac{d}{da} \right|_{a=t} \Phi_{a,t}(x), \quad x \in \alpha_t(U) \quad (38)$$

を誘導する。

(ii) 時間に依存するベクトル場  $\tilde{F}_\varepsilon(t, x)$  で

$$F_\varepsilon(t, x) = Fx + \varepsilon g_1(t, x) + \cdots + \varepsilon^m g_m(t, x) + \varepsilon^{m+1} \tilde{F}_\varepsilon(t, x) \quad (39)$$

を満たすものが存在する。ここで  $\tilde{F}_\varepsilon(t, x)$  は  $\varepsilon, t, x$  について  $C^\infty$  であり、導関数までこめて  $t \in \mathbf{R}$  について一様有界である。特にベクトル場  $F_\varepsilon(t, x)$  は元の方程式 (9) が定義するベクトル場  $Fx + \varepsilon g_1(t, x) + \cdots$  の  $O(\varepsilon^{m+1})$  近傍にある。この意味において、 $F_\varepsilon(t, x)$  を近似ベクトル場と呼ぶ。

**Theorem 12. (Error Estimate, [4])**

(i) 式 (9) に対する  $m$  次のくりこみ群方程式の解を  $y(t)$  とし、 $m$  次のくりこみ群変換を  $\alpha_t$  とする。このとき、近似ベクトル場  $F_\varepsilon(t, x)$  の積分曲線  $\tilde{x}(t)$  は

$$\tilde{x}(t) = \alpha_t(y(t)) = X(t)y(t) + \varepsilon h_t^{(1)}(y(t)) + \cdots + \varepsilon^m h_t^{(m)}(y(t)) \quad (40)$$

で与えられる。

(ii) ある正の定数  $\varepsilon_0, C, T$  と原点のコンパクト近傍  $V = V(\varepsilon) \subset \mathbf{R}^n$  が存在し、 $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  なる任意の  $\varepsilon$  に対して次が成り立つ： $x(t)$  を式 (9) の解、 $\tilde{x}(t)$  を式 (40) で定義される曲線で  $x(0) = \tilde{x}(0) \in V$  を満たすものとする。このとき次の不等式が成り立つ。

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| < C\varepsilon^m, \quad \text{for } 0 \leq t \leq T/\varepsilon. \quad (41)$$

以下の 2 つの定理では自励系の方程式

$$\dot{x} = Fx + \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x) + \cdots, \quad (42)$$

を考える。ここで  $\varepsilon \in \mathbf{R}$  は微小なパラメータであり、前と同様に  $F$  は対角化可能な  $n \times n$  行列でその全ての行列は虚軸上にあり、 $g_i(x)$  は  $\mathbf{R}^n$  上の多項式ベクトル場とする。

**Theorem 13. (Existence of Invariant Manifolds, [3])**

式 (42) に対するくりこみ群方程式の最初の恒等的に零でない項を  $\varepsilon^k R_k(y)$  とする。このとき、方程式  $\dot{y} = \varepsilon^k R_k(y)$  が法双曲型不変多様体  $N$  を持つならば、十分小さい  $|\varepsilon|$  に対して式 (42) も  $N$  と微分同相な不変多様体  $N_\varepsilon$  を持つ。特に  $N$  と  $N_\varepsilon$  の安定性は一致する。

**Theorem 14. (Inheritance of the Symmetry, [3,4])**

(i) もしベクトル場  $Fx$  と  $g_1(x), g_2(x), \dots$  が Lie 群  $G$  の作用で不変ならば、式 (42) に対する  $m$  次のくりこみ群方程式もまた  $G$  の作用で不変である。

(ii) 式 (42) に対する  $m$  次のくりこみ群方程式は線形ベクトル場  $Fx$  が誘導する 1 パラメータ群  $X(t) = e^{Ft}$  の作用で不変である。すなわち、 $R_i(y)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , は

$$X(t)R_i(y) = R_i(X(t)y), \quad y \in \mathbf{R}^n. \quad (43)$$

を満たす。

Thm.11 は、くりこみ群の方法で構成した近似解 (40) は well-defined はベクトル場  $F_\varepsilon(t, x)$  を定義し、この  $F_\varepsilon(t, x)$  は元のベクトル場をよく近似することを意味する。言い換えれば、曲線族 (40) は

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = F_\varepsilon(t, \bar{x}) \quad (44)$$

なる“近似”方程式の解になっている。いったん近似方程式が得られれば、元の方程式 (9) と上式の辺々を引き算して Gronwall の不等式を用いることで Thm.12 は比較的容易に示せる。近似ベクトル場  $F_\varepsilon(t, x)$  は元のベクトル場に十分近いのだから、Fenichel の定理 (Thm.3) から、 $F_\varepsilon(t, x)$  が持つ不変多様体が元の方程式に遺伝することが期待されるが、実際にはくりこみ群方程式から直接不変多様体が遺伝することを Thm.13 は意味する。力学系理論の言葉を使って言えば、これは  $F_\varepsilon(t, x)$  とくりこみ群方程式が位相共役だからである。したがってくりこみ群方程式の位相的性質から元の方程式の位相的性質が従うので、くりこみ群方程式は元の方程式よりも解析が容易であることを期待したいが、Thm.14 はこの点を保証する。すなわち、元の方程式が自励系で  $k$  次元の Lie 群の作用で不変ならば、そのくりこみ群方程式は少なくとも  $k + 1$  次元の Lie 群の作用で不変であることが Thm.14 の (i),(ii) から分かる。なお Thm.14.(i) は元の方程式が自励系でなくとも成り立

つ。このとき (ii) は成り立たないが、くりこみ群方程式はいつでも自励系である、すなわち時間の平行移動の群の作用で不変であるため、この意味において非自励系の場合にもくりこみ群方程式は  $k + 1$  次元の Lie 群の作用で不変になる。

**Remark 15.** 一般に無限次数のくりこみ群方程式とくりこみ群変換は収束しないが、収束するための必要十分条件は分かっている [6]。雑に言えば、 $S^1$  と微分同相なある Lie 群の作用で元の方程式が不変であることが無限次数くりこみ群方程式が収束するための必要十分条件を与える。これは次のように理解される。Thm.14 よりくりこみ群方程式は 1-パラメータ群  $e^{Ft}$  の作用で不変である。式 (37),(38) から分かるように近似ベクトル場  $F_\varepsilon(t, x)$  はくりこみ群方程式をくりこみ群変換で移して得られるから、 $F_\varepsilon(t, x)$  も  $e^{Ft}$  をくりこみ群変換して得られる 1-パラメータ群の作用で不変である。今、式 (39) において  $m \rightarrow \infty$  とし右辺が元の方程式に収束したとすると、左辺が 1-パラメータ群の作用で不変であるから右辺もそうでなければならない。

## 4 簡単な例

いくつか簡単な例を用いて Thm.13, 14 を確認しよう。

**Example 16.** 次の  $\mathbf{R}^2$  上の方程式を考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + \varepsilon x, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (45)$$

非線形項  $x^3$  を  $\varepsilon$  について 1 次の項に追いやるために  $(x, y) = (\varepsilon^{1/2}X, \varepsilon^{1/2}Y)$  と変数変換すると

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + \varepsilon(X - X^3), \\ \dot{Y} = -X \end{cases} \quad (46)$$

となる。複素変数  $z$  を導入して  $X = z + \bar{z}$ ,  $Y = i(z - \bar{z})$  とおくと非摂動部分が対角化されて

$$\begin{cases} \dot{z} = iz + \frac{\varepsilon}{2}(z + \bar{z}) - \frac{\varepsilon}{2}(z + \bar{z})^3, \\ \dot{\bar{z}} = -i\bar{z} + \frac{\varepsilon}{2}(z + \bar{z}) - \frac{\varepsilon}{2}(z + \bar{z})^3, \end{cases} \quad (47)$$

となる (先に対角化しておいたほうが、くりこみ群方程式の計算が楽である)。この方程式に対して 1 次のくりこみ群方程式を求めると

$$\dot{z} = \frac{\varepsilon}{2}(z - 3|z|^2z) \quad (48)$$

となる。  $z = re^{i\theta}$  において極座標に変換すると

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\varepsilon r}{2}(1 - 3r^2), \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (49)$$

なる方程式を得る。Thm.14 はくりこみ群方程式が調和振動子が定義する flow  $e^{Ft}$ ,  $F = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$  の作用で不変である (回転不変性) ことを主張する。したがって極座標で書くと  $r$  方向の方程式と  $\theta$  方向の方程式が split し、方程式が可積分になることに注意せよ。より一般に、2次元自例系の方程式に対するくりこみ群方程式は可積分である。 $\varepsilon$  が正のとき、上式の第1式は不動点  $r = 0, \sqrt{1/3}$  を持ち、前者は不安定、後者は安定であることが容易に確認できる。したがってくりこみ群方程式は半径  $r = \sqrt{1/3}$  の安定な周期軌道 (正確には  $S^1$  と同相な不動点の族であるが) を持ち、Thm.13 より式 (46) も安定な周期軌道を持つことが分かる。座標系を  $(x, y)$  座標に戻すことで、式 (45) も安定な周期軌道を持ち、その半径のオーダーは  $O(\varepsilon^{1/2})$  であることが分かる。これは古典的な Hopf の定理の結果と一致する。周期軌道のより詳細な位置を求めたければ、くりこみ群変換  $\alpha_t$  を望ましい次数まで計算し、くりこみ群方程式の周期軌道をこのくりこみ群変換で移せばよい。

**Example 17.** 次の  $\mathbf{R}^2$  上の方程式を考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = y + y^2, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon^2 y - xy + y^2. \end{cases} \quad (50)$$

$(x, y) = (\varepsilon X, \varepsilon Y)$  と変数変換し、前と同様に複素変数  $z$  を導入して非摂動部分に対角化したのちに、“2 次の” くりこみ群方程式を求めると

$$\dot{z} = \varepsilon^2(z - 3|z|^2 z - \frac{16i}{3}|z|^2 z) \quad (51)$$

となる。1 次の部分  $R_1$  は恒等的に零になることに注意せよ。 $x = re^{i\theta}$  とおいて極座標に変換すると

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon^2 r(1 - 3r^2), \\ \dot{\theta} = -\frac{16}{3}\varepsilon^2 r^2 \end{cases} \quad (52)$$

を得る。 $\varepsilon \neq 0$  が正のときも負のときも  $r = \sqrt{1/3}$  が安定な周期軌道であり、したがって元の方程式 (50) は  $\varepsilon \neq 0$  が十分零に近いとき、半径のオーダーが  $O(\varepsilon)$  のところに安定な周期軌道を持つことが分かる。Ex.16 と異なり、 $\varepsilon$  が 0 をまたぐ前にも後にも周期軌道が存在している。このようなケースは退化した **Hopf** 分岐として知られている。

ここで挙げた例は従来の分岐理論でも容易に示せるものばかりである。より高度な例として、Sec.6 では蔵本モデルに対する 3 次のくりこみ群方程式を解析する。また結合させたメトロノームの解析においてはくりこみ群方程式のくりこみ群方程式を計算したり、興味ある不変多様体がくりこみ群の方法の適用可能領域  $U = U(\varepsilon)$  に入るように複数のスケーリング則を使い分けたりする必要がある (論文は準備中)。このように、数学的構造をよく理解して与えられた問題を Thm.13 が使える状況にまで持っていくことが肝要である。

## 5 古典的摂動法との関係

くりこみ群の方法が古典的な摂動法を特別な場合として含む (あるいは、そのように一般化できる) ことは Chiba [6] によって示されている。ここではその簡単な review を与える。

### 5.1 多重尺度法 [18]

多重尺度法は平均化法と共に最も古い摂動法であり、異なる時間スケールの導入と永年項の除去という2つのアイデアに基づいている。 $\mathbf{R}^n$  上の方程式

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Fx + \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x) + \dots \quad (53)$$

を考えよう。定行列  $F$  は対角化可能でその固有値は全て虚軸上にあるとし、 $g_i(x)$  は  $x$  について多項式であると仮定する。 $m$  個の異なる時間スケール  $t_0, t_1, \dots, t_m$  が存在し、元の時間  $t$  と

$$t_0 = t, t_1 = \varepsilon t, \dots, t_m = \varepsilon^m t \quad (54)$$

なる関係にあるとしよう。このとき

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \dots + \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial t_m} \quad (55)$$

と書ける。また従属変数  $x$  は

$$x(t) = x_0(t_0, t_1, \dots, t_m) + \varepsilon x_1(t_0, t_1, \dots, t_m) + \varepsilon^2 x_2(t_0, t_1, \dots, t_m) + \dots \quad (56)$$

と展開できるとする。式 (55), (56) を式 (53) に代入して  $\varepsilon$  のべきで整理すると、例えば1次までは

$$\frac{\partial x_0}{\partial t_0} = F x_0 \quad (57)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_0} + \frac{\partial x_0}{\partial t_1} = F x_1 + g_1(x_0) \quad (58)$$

を得る。前者の解は  $x_0 = e^{F t_0} y$  と書ける。ここで  $y = y(t_1, \dots, t_m)$  は  $t_0$  には依存しないが、 $t_1, \dots, t_m$  には依存しても構わない。この  $x_0$  を式 (58) に代入して  $x_1$  について解くと、一般解は

$$x_1(t_0, \dots, t_m) = e^{F(t_0 - \tau)} h + e^{F t_0} \int_{\tau}^{t_0} e^{-F s} \left( g_1(e^{F s} y) - e^{F s} \frac{\partial y}{\partial t_1} \right) ds$$

となる。右辺の積分から生じる永年項は

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_{\tau}^{t_0} e^{-Fs} \left( g_1(e^{Fs}y) - e^{Fs} \frac{\partial y}{\partial t_1} \right) ds = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_{\tau}^{t_0} e^{-Fs} g_1(e^{Fs}y) ds - \frac{\partial y}{\partial t_1} \quad (59)$$

で与えられるから、永年項が消えることを要求すれば 1 次のくりこみ群方程式  $\partial y / \partial t_1 = R_1(y) \Rightarrow \partial y / \partial t = \varepsilon R_1(y)$  を得る。多重尺度法ではこれを (1 次の) 遅い時間スケールの方程式と呼ぶ。2 次以上の場合も永年項が消えることを要求することでくりこみ群方程式と同じ方程式が現れることを示すことができる。

## 5.2 ベクトル場の標準形 [15],[16]

式 (53) に対して “時間に依存しない” (局所) 座標変換  $x \mapsto z$  が存在して式 (53) を

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + \varepsilon \tilde{g}_1(z) + \varepsilon^2 \tilde{g}_2(z) + \cdots \\ \text{s.t. } \tilde{g}_i(e^{Ft}z) = e^{Ft} \tilde{g}_i(z), \text{ for } i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (60)$$

と変形できるとき、式 (60) を式 (53) に対する標準形 (**normal form**) という。多重尺度法のような他の摂動法と異なり、近似解を構成するのが目的ではなくベクトル場そのものを座標変換して簡単な形にするのが目的であるから力学系理論と相性がよく、不動点周りの解析では重宝される。

さて、Thm.11 より、式 (53) に対してくりこみ群変換  $x = \alpha_t(y)$  を施すとくりこみ群方程式 (35) が得られる。さらに  $y = e^{-Ft}z$  と座標変換すると、Thm.14 (ii) に注意すれば

$$\dot{z} = Fz + \varepsilon R_1(z) + \varepsilon^2 R_2(z) + \cdots \quad (61)$$

なる方程式を得る。Thm.14 (ii) よりこの方程式は一見標準形の条件 (60) を満たしているように見えるが、座標変換  $x = \alpha_t(e^{-Ft}z)$  が  $t$  に依存しないことを確認しなければならない。これは次の補題から従う。

**Lemma 18.** くりこみ群変換  $\alpha_t$  は  $\alpha_t(e^{Ft'}y) = \alpha_{t+t'}(y)$  を満たす。

この補題より  $\alpha_t(e^{-Ft}z) = \alpha_0(z)$  は  $t$  に依存しないので、式 (61) は標準形であり、したがってくりこみ群方程式は標準形と同値な方程式であることが示された。なお、標準形は線形部分が対角化不可能でも定義可能なのでその点においては標準形のほうがくりこみ群の方法よりも一般性が高いが、くりこみ群の方法は非自励系の方程式に対しても定義できるという点においてはくりこみ群の方法のほうが標準形よりも一般性が高い。

**Remark 19.** 一般に与えられた方程式 (53) に対し、その標準形は一意ではないことが知られている。したがって実はくりこみ群方程式も一意ではない。非一意性は式 (19),(21) に含まれる未定の積分定数に起因する (式 (18),(20) の積分定数は  $t \rightarrow \infty$  の極限で消える



ことに注意せよ) が、積分変数は  $s$  であるため積分定数は  $y$  の関数でも構わない。例えば式 (19) の積分定数としてある  $y$  の関数  $C(y)$  を選ぼう。このとき式 (20) で与えられる  $R_2$  を  $R_2(y; C(y))$  と書くことにすると、 $R_2(y; C(y)) = R_2(y; 0) - [C(y), R_1(y)]$  なる関係式が成り立つことが示せる。ここで  $[ , ]$  はベクトル場の Lie 括弧積である。したがって、 $C(y)$  をうまく選ぶことにより  $R_2(y; C(y))$  が線形写像  $[ , R_1(y)]$  の核に入るようにすることができる。このように、積分定数をうまく選ぶことで  $R_2, R_3, \dots$  をできるだけ簡単な形にとることができるが、得られる結果は normal form をさらに reduction することで得られる hyper-normal form [16] と一致することが分かっている (Chiba [4])。

### 5.3 中心多様体縮約 [14]

式 (53) に対して次の仮定を設ける。

(C1) 行列  $F$  は固有値を虚軸上と左半平面のみに持ち、虚軸上の固有値に対応する Jordan ブロックは対角化可能である。

(C2) 各  $g_i(x)$  は  $x$  について 1 次以上の多項式である。

もし全ての固有値が左半平面にあるときは原点は安定であり、原点近傍の流れの様子は自明であるから、少なくとも 1 つの固有値は虚軸上にあるものとしよう。このとき、式 (53) は原点に接する中心多様体を持つ。分岐などの非自明な流れは中心多様体の中で起こり、中心多様体の外側の軌道は  $t \rightarrow \infty$  で中心多様体に引き込まれるため、中心多様体とその中の flow を構成することは重要である。くりこみ群の方法を用いてこれを行うのがこの節の目的である。

$N_0$  を上の条件を満たす式 (53) の中心部分空間とする。すなわち  $N_0$  は  $F$  の虚軸上の固有値に従属する固有ベクトルが張る部分空間である。式 (53) に対して関数  $R_i : N_0 \rightarrow \mathbf{R}^n$  と  $h_t^{(i)} : N_0 \rightarrow \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \dots$  を

$$R_1(y) := \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \int X(s)^{-1} g_1(s, X(s)y) ds, \quad (62)$$

$$h_t^{(1)}(y) := X(t) \int \left( X(s)^{-1} g_1(s, X(s)y) - R_1(y) \right) ds, \quad (63)$$

および  $i = 2, 3, \dots$  のときには

$$R_i(y) := \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \int \left( X(s)^{-1} G_i(s, X(s)y, h_s^{(1)}(y), \dots, h_s^{(i-1)}(y)) \right. \\ \left. - X(s)^{-1} \sum_{k=1}^{i-1} (Dh_s^{(k)})_y R_{i-k}(y) \right) ds, \quad (64)$$

$$h_t^{(i)}(y) := X(t) \int \left( X(s)^{-1} G_i(s, X(s)y, h_s^{(1)}(y), \dots, h_s^{(i-1)}(y)) \right. \\ \left. - X(s)^{-1} \sum_{k=1}^{i-1} (Dh_s^{(k)})_y R_{i-k}(y) - R_i(y) \right) ds, \quad (65)$$

で定義しよう。式 (18) ~ (21) と異なるのは定義域だけであって、式の形は同じである (極限が  $t \rightarrow +\infty$  ではなく  $t \rightarrow -\infty$  になっているのは発散を防ぐための技術的な細工であって、あまり本質的なことではない)。ただし積分定数は全て零ととることにする。補題として次の事実が成り立つ。

**Lemma 20.** 関数  $R_1(y), R_2(y), \dots$  は well-defined であって (すなわち極限は収束して) 次が成り立つ。

- (i) 任意の  $y \in N_0$ ,  $i = 1, 2, \dots$  に対して  $R_i(y) \in N_0$ .
- (ii) 任意の  $i = 1, 2, \dots$  に対して  $h_t^{(i)}(y)$  は  $t \in \mathbf{R}$  について一様有界である。

こうして定義した  $R_i, h_t^{(i)}$  に対し、 $N_0$  上の  $m$  次のくりこみ群方程式を

$$\dot{y} = \varepsilon R_1(y) + \varepsilon^2 R_2(y) + \dots + \varepsilon^m R_m(y), \quad y \in N_0 \quad (66)$$

で定義し、 $N_0$  上の  $m$  次のくりこみ群変換  $\alpha_t : N_0 \rightarrow \mathbf{R}^n$  を

$$\alpha_t(y) = X(t)y + \varepsilon h_t^{(1)}(y) + \dots + \varepsilon^m h_t^{(m)}(y) \quad (67)$$

で定義する。やはり式の形は式 (35), (36) と同じであり、異なるのは定義域のみである。今、Lem.20 より  $R_i(y)$  の定義域と値域は  $N_0$  であるから、式 (66) は  $N_0$  上で定義された微分方程式を定めることに注意せよ。すなわち式 (66) を成分毎に書いたとき、互いに 1 次独立な方程式は  $\dim(N_0)$  本しかないことが分かる。このとき  $N_0$  上で Thm.11 ~ Thm.14 が成り立ち (詳細は Chiba [5] を参照せよ)、さらに次の定理が成り立つ。

**Theorem 21. (Approximation of Center Manifolds, [5])**

$\alpha_t$  を  $N_0$  上の  $m$  次のくりこみ群変換とし、 $W$  を原点のコンパクトな近傍で  $W \cap N_0$  上では  $\alpha_t$  が微分同相であるようなものとする (Rem.10)。このとき、集合  $\alpha_t(W)$  は式 (53) の局所中心多様体の  $O(\varepsilon^{m+1})$  近傍にある。

## 5.4 平均化法 [17]

多様体  $M$  上の次の方程式を考えよう。

$$\dot{x} = \varepsilon g_1(t, x) + \varepsilon^2 g_2(t, x) + \cdots \quad (68)$$

ここで各  $g_i$  は  $M$  上の時間に依存する滑らかなベクトル場であり、 $t$  について概周期的であって全ての  $g_i$  の Fourier 指数の全体は  $\mathbf{R}$  上に集積点を持たないとする。この方程式に対して写像  $R_i, u_t^{(i)} : M \rightarrow M$  を

$$R_1(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int^t g_1(s, y) ds, \quad (69)$$

$$u_t^{(1)}(y) = \int^t (g_1(s, y) - R_1(y)) ds \quad (70)$$

および  $i = 2, 3, \dots$  のときは

$$R_i(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int^t \left( G_i(s, y, u_s^{(1)}(y), \dots, u_s^{(i-1)}(y)) - \sum_{k=1}^{i-1} (Du_s^{(k)})_y R_{i-k}(y) \right) ds, \quad (71)$$

$$u_t^{(i)}(y) = \int^t \left( G_i(s, y, u_s^{(1)}(y), \dots, u_s^{(i-1)}(y)) - \sum_{k=1}^{i-1} (Du_s^{(k)})_y R_{i-k}(y) - R_i(y) \right) ds, \quad (72)$$

で定義し、 $m$  次のくりこみ群方程式を式 (35) で、 $m$  次のくりこみ群変換を

$$\alpha_t(y) = y + \varepsilon u_t^{(1)}(y) + \cdots + \varepsilon^m u_t^{(m)}(y) \quad (73)$$

で定義する。このとき、Thm.11 ~ Thm.14(i) が今の状況でもそのまま成り立つことが示される。

**Remark 22.** 前節までの問題設定と大きなギャップがあるように思われるかもしれないが、次のように考えればよい。次の形の方程式を考えよう。

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g_1(t, x) + \varepsilon^2 g_2(t, x) + \cdots \quad (74)$$

今、ベクトル場  $f$  の flow を  $\varphi_t$  とし、これは  $t$  について概周期的であるとする。そこで上式に対して  $x = \varphi_t(X)$  と変数変換すれば

$$\dot{X} = \varepsilon (D\varphi_t)_X^{-1} g_1(t, \varphi_t(X)) + \varepsilon^2 (D\varphi_t)_X^{-1} g_2(t, \varphi_t(X)) + \cdots \quad (75)$$

なる方程式が得られるので、(改めて  $g_i$  等の定義を置き直すことで) 式 (68) のタイプの問題に帰着される。特に  $f(x)$  が線形の場合が前節までで扱っていた問題である。したがっ

てここでの方法は前節までのくりこみ群の方法の純粋な一般化にあたるが、実は上の意味でのくりこみ群方程式は素朴な摂動法や包絡線の原理からは得ることができない。したがって Sec.1 でも述べたように、くりこみ群の方法を特別な場合として含む、何か異なる指導原理が働いていると思うべきであるが、(包絡線のような)直観的に分かりやすい説明の仕方は分かっていない。また上の意味での1, 2次のくりこみ群方程式は平均化法における1, 2次の平均化方程式とそれぞれ一致するが、(著者の知る限り)3次の平均化方程式はこれまで定義されていなかったため、ここでの方法は平均化法の一般化を与える。

またくりこみ群の方法(の一般化)は幾何学的摂動法 [12],[13] を特別な場合として含むことが示せる。これはこの節のアイデアと前節の中心多様体縮約のアイデアを組み合わせることで得られ、くりこみ群方程式で critical manifold の上の flow を近似的に構成することができる。詳細は Chiba [6] を参照せよ。

## 6 蔵本モデルの解析

同期現象や蔵本モデルの一般論について私は解説できる立場にないし、残りページもないので、文献 [19, 20, 21] に譲ることにし、ここではくりこみ群の方法を用いて得られる結果について端的に述べる。

蔵本モデルとは以下で定義される  $N$ -トーラス上の常微分方程式である。

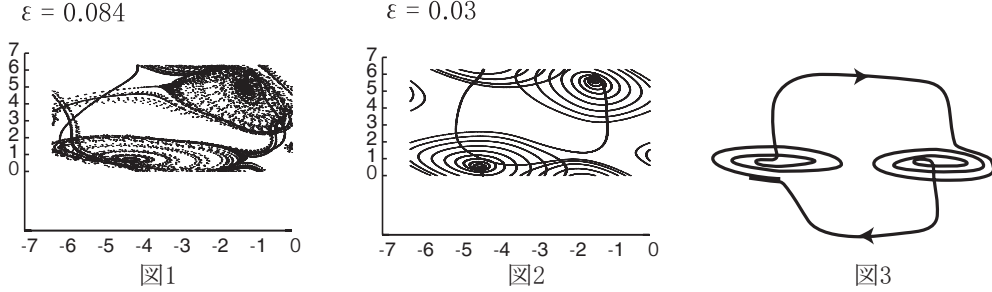
$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \varepsilon \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (76)$$

ここで  $\theta_i \in S^1$ (円周) は素子  $i$  の状態変数、 $\omega_i$  は自然振動数 (natural frequency) と呼ばれる正の定数、 $N$  は素子の数、 $\varepsilon$  は結合の強さを表す正の定数である。結合強度  $\varepsilon$  がある閾値  $\varepsilon_0$  より大きくなると同期現象が起こる、すなわち全ての  $i, j$  に対して  $|\theta_i - \theta_j|$  が有界に留まることが知られているが(特に  $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_N$  のときには  $|\theta_i - \theta_j|$  が定数に収束するが)、 $\varepsilon$  を零から徐々に大きくしていくとき、どのようなメカニズムで同期状態に至るかはよく分かっていない。近年、Maistrenko ら [22] によって  $N = 4$  のときにカオスが起こることが数値的に確認されている。ここでは  $N = 5$  の場合にカオスが起こるメカニズムを明らかにしてみよう。

以下では  $N = 5, \omega_1 = -1.0, \omega_2 = -0.5, \omega_3 = 0.0, \omega_4 = 0.5, \omega_5 = 1.0$  を固定する。この  $\omega_i$  の選び方は一様分布のなごりであって深い(物理的)意味はない。蔵本モデルは回転対称性を持つので  $\psi_i = \theta_i - \theta_3, (i = 1, 2, 4, 5)$  とおけば次の4次元の方程式が得られる。

$$\dot{\psi}_i = \omega_i + \varepsilon \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j - \psi_i) - \varepsilon \sum_{j=1}^N \sin \psi_j, \quad i = 1, 2, 4, 5. \quad (77)$$

この方程式に対し、断面  $\{\psi_4 = 0\}$  上での Poincaré 写像 (これは 3 次元の離散力学系) を数値計算してみると、 $\varepsilon = 0.084$  と  $\varepsilon = 0.03$  で次のような相図が得られた。なお、同期現象が起こるのはおよそ  $\varepsilon \sim 0.3$  からである。



$\varepsilon = 0.084$  ではストレンジアトラクタが存在することが確認できる。 $\varepsilon$  を徐々に小さくしていくと次第に “カオスっぽさ” が弱くなっていき、 $\varepsilon = 0.03$  では図 2 のような安定な “ぐるぐる巻きの軌道” が得られる。このグラフは  $\text{mod } 2\pi$  で見なければならぬので、この軌道を模式的に描くと図 3 のようになる。一見周期軌道のように見えるが、長時間計算すると弱いカオスのように思われた。なお、上図の軌道以外に安定な 2-トーラスがアトラクタとして共存し、その存在はくりこみ群の方法を用いて厳密に証明できるが、ここではそれは行わない。

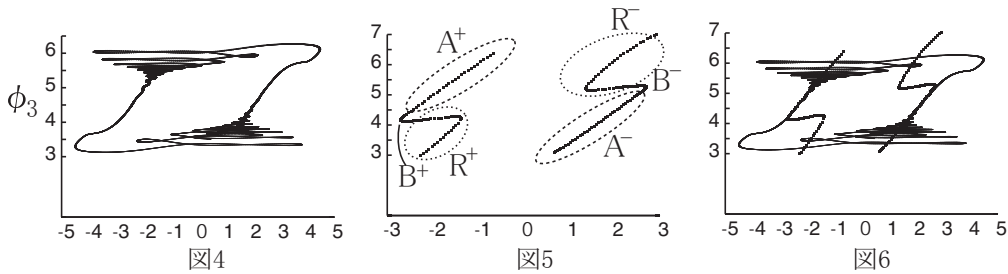
さて、図 1 のストレンジアトラクタは図 2 の “ぐるぐる巻きの軌道” が成長して生じているようなので、なぜこのような “ぐるぐる巻きの軌道” が生じるのかをくりこみ群の方法を用いて理解したい。まず式 (77) に対して  $\dot{r}_i = 0$  という動径方向の方程式を形式的に添加し、 $x_i = r_i \cos \psi_i$ ,  $y_i = r_i \sin \psi_i$  とおいて直交座標に直す。すると非摂動項 (線形項) は調和振動子の直積になるのでくりこみ群の方法が使える。そこでこの方程式に対して 3 次までのくりこみ群方程式を求め、これを極座標で書き下そう。すると動径方向については自明な方程式 ( $\dot{r}_i = 0$ ) が得られるのでこれを捨て、位相方程式だけ残すと、4-トーラス上の 3 次くりこみ群方程式が得られる。

Thm.14 (ii) よりこのくりこみ群方程式は対称性を 1 つ持つので、うまく座標系と時間スケールを変換することにより次の形の  $(3 + 1)$  次元の方程式を得る。

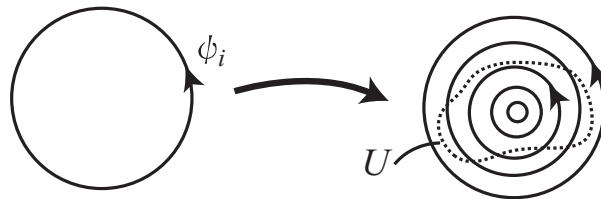
$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = P_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3) + \varepsilon Q_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \\ \dot{\phi}_2 = P_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3) + \varepsilon Q_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \\ \dot{\phi}_3 = \varepsilon Q_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \\ \dot{\phi}_4 = P_4(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) + \varepsilon Q_4(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4). \end{cases} \quad (78)$$

式 (35) の記号で言えば  $R_1$  は恒等的に零であり、 $P_i$  が  $R_2$ 、 $Q_i$  が  $R_3$  に対応する。 $P_i, Q_i$  の具体的な表式は非常に長いためここでは割愛する。 $\phi_3$  方向については 2 次の部分  $P_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  も消えることに注意せよ。 $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  についての方程式は 3 次元の方程式と

して閉じており、これを数値計算してみると図4のようになり、例の“ぐるぐる巻きの軌道”が再び得られた。図2は4次元の方程式のPoincaré写像の軌道であったが、図4は3次元の方程式そのものの軌道であるため、くりこみ群の方法を用いて方程式の本質的な情報を残したまま次元を1つ減らせたことになる。



**Remark 23.** Thm.11 が示すようにくりこみ群の方法は基本的には局所理論であるが、この問題の場合は式(78)は式(77)の大域的な性質をうまく捉えている。それは次の理由による。式(77)の $\psi_i$ は $S^1$ 上を運動するが、これに動径方向の方程式 $\dot{r}_i = 0$ を加えることで、 $\mathbf{R}^2$ を $\psi_i$ の方程式のコピーで埋め尽くす。くりこみ群の方法はこの $\mathbf{R}^2$ の原点近傍 $U$ で有効であるが、 $U$ がどんなに小さくともその中には $\psi_i$ の方程式(のコピー)がすっぽり含まれているため、くりこみ群の方法が大域的に機能するのである。



なぜ図4のような“ぐるぐる巻きの軌道”が生じるのかを明らかにしたい。そのためにまずは式(78)の非摂動系

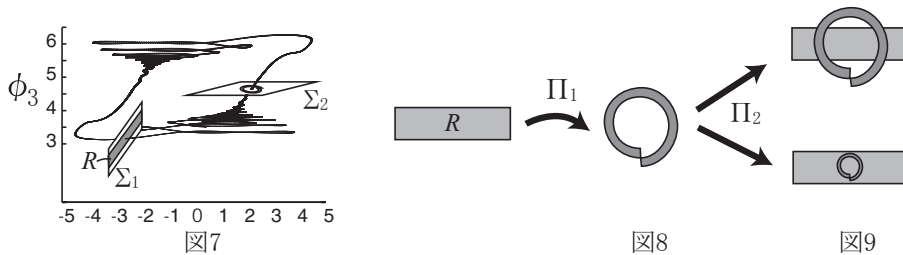
$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = P_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \\ \dot{\phi}_2 = P_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \\ \dot{\phi}_3 = 0, \end{cases} \quad (79)$$

を考えよう。これは $\phi_3$ をパラメータとする2次元の方程式の族だと思えることができる。この族に対して不動点を数値計算すると、図5のような不動点の集合が得られた。図中に丸で囲ってある曲線 $A^+$ と $A^-$ は安定なフォーカスたちからなる曲線であり、 $R^+$ と $R^-$ は不安定な不動点たちからなる曲線である。その境目にある点 $B^+, B^-$ はサドル-ノード分岐点である。

図4と図5を重ね合わせて表示したものが図6である。今やなぜ“ぐるぐる巻きの軌道”が生じるのかはほとんど明らかである。例えば図6の左上付近を初期値とする軌道は安定な曲線 $A^+$ に巻きつきながら漸近していくが、式(79)に対する摂動系(78)は $\phi_3$ 方向

の運動を持っており、 $A^+$  付近では  $Q_3$  の関数値が負であるため、軌道は下に流されながら  $A^+$  に漸近する。やがて分岐点  $B^+$  に到達すると  $A^+$  から飛び出し、今度は安定な曲線  $A^-$  のほうに近づいていく。 $A^-$  の付近では  $Q_3$  の関数値が正であるため上に流されながら  $A^-$  に巻きついていき、やがて  $B^-$  に到達すると  $A^-$  から飛び出して  $A^+$  のほうにスイッチする。このような運動を周期的に繰り返すのである。

なぜ“ぐるぐる巻きの軌道”が生じるのかが分かった。次に、この軌道を種にしてカオスが生じるかどうかを考察しよう。そのために、図4の軌道上に図7のように2つの断面をとろう。1つは  $\phi_1$  軸(図の横軸)に直交する平面  $\Sigma_1$  であり、1つは  $\phi_3$  軸(図の縦軸)に直交する平面  $\Sigma_2$  である。式(78)の flow で定義される  $\Sigma_1$  から  $\Sigma_2$  への transition map を  $\Pi_1$  とし、 $\Sigma_2$  から  $\Sigma_1$  への transition map を  $\Pi_2$  とする。 $\Sigma_1$  上の長方形  $R$  は渦巻き状の軌道上を運動する間に変形され、 $\Pi_1(R)$ 、および  $\Pi_2 \circ \Pi_1(R)$  は図8のような馬蹄形になることが示せる。 $R$  と  $\Pi_2 \circ \Pi_1(R)$  の位置関係は大きく分けて次のようである。もし安定な不動点の集合からなる曲線  $A^+$  と  $A^-$  の吸引力が強いときは  $R$  は  $A^+, A^-$  付近を運動する間に十分縮み、図9下段のように  $\Pi_2 \circ \Pi_1$  が縮小写像になる。すると不動点定理より式(78)は安定な周期軌道を持つことになるが、これが図4の状況である。一方、 $A^+$  と  $A^-$  の吸引力が比較的弱いときには  $R$  は十分には縮まず、 $R$  と  $\Pi_2 \circ \Pi_1(R)$  の位置関係は図9上段のようになるため Smale の馬蹄が生じ、結果としてストレンジアトラクタが生じる。

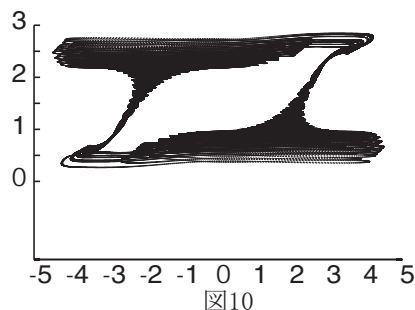


実際、式(78)の  $\phi_3$  方向に小さな摂動を与えた方程式

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = P_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3) + \varepsilon Q_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \\ \dot{\phi}_2 = P_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3) + \varepsilon Q_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \\ \dot{\phi}_3 = (\varepsilon + \delta) Q_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \end{cases} \quad (80)$$

を数値計算すると  $\varepsilon = 0.01, \delta = 0.005$  のときに図10のような相図が得られ、ストレンジアトラクタが生じていることが分かる ( $\phi_3$  方向の上昇速度を強めることは  $A^+$  と  $A^-$  の吸引力を弱めることとほとんど同じ役割を果たすことに注意せよ)。さて、式(78)に対する  $\Pi_1 \circ \Pi_2(R)$  は図9下段のようになっていてストレンジアトラクタを持たない。式(78)を3次のくりこみ群変換で元の  $\psi_i$  座標に戻すと、Thm.11より近似ベクトル場  $F_\varepsilon$  が得られ、これは元の方程式(77)の右辺と式(39)のような関係にある。すなわち式(77)は近似ベクトル場  $F_\varepsilon$  に小さな誤差  $\varepsilon^4 \widetilde{F}$  を加えたものになっているが、これが上式の  $\delta$  とちょうど同

じ役割を果たし、結果として  $\Pi_2 \circ \Pi_1(R)$  が図 9 上段のようになってストレンジアトラクタを誘発する。これが蔵本モデルにおいてカオスが生じるメカニズムである。



## Reference

- [1] L. Y. Chen, N. Goldenfeld, Y. Oono, Renormalization group theory for global asymptotic analysis, Phys. Rev. Lett. 73 (1994), no. 10, 1311-15
- [2] L. Y. Chen, N. Goldenfeld, Y. Oono, Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory, Phys. Rev. E 54, (1996), 376-394
- [3] H. Chiba,  $C^1$  approximation of vector fields based on the renormalization group method, (submitted)
- [4] H. Chiba, Simplified Renormalization Group Equations for Ordinary Differential Equations, (submitted)
- [5] H. Chiba, Approximation of Center Manifolds on the Renormalization Group Method, (submitted)
- [6] H. Chiba, Extension and Unification of Traditional Singular Perturbation Methods, (in preparation)
- [7] R. E. Lee DeVille, A. Harkin, M. Holzer, K. Josić, T. Kaper, Analysis of a Renormalization Group Method for solving perturbed Ordinary Differential Equations, Physica D, (preprint)
- [8] S. Ei, K. Fujii, T. Kunihiro, Renormalization-group method for reduction of evolution equations; invariant manifolds and envelopes, Ann. Physics 280 (2000), no. 2, 236-298
- [9] T. Kunihiro, A geometrical formulation of the renormalization group method for global analysis, Progr. Theoret. Phys. 94 (1995), no. 4, 503-514
- [10] T. Kunihiro, The renormalization-group method applied to asymptotic analysis of vector fields, Progr. Theoret. Phys. 97 (1997), no. 2, 179-200
- [11] M. Ziane, On a certain renormalization group method, J. Math. Phys. 41 (2000), no. 5, 3290-3299
- [12] Fenichel, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, J. Differential Equations 31 (1979), no.1, pp.53-98
- [13] L. Arnold et al, Dynamical systems, Lecture notes in mathematics 1609, Springer Verlag, 1995
- [14] J. Carr, Applications of Centre Manifold Theory, Springer-Verlag, 1981



- [15] S. N. Chow, C. Li, D. Wang, Normal forms and bifurcation of planar vector fields, Cambridge University Press, 1994
- [16] J. Murdock, Normal forms and unfoldings for local dynamical systems, Springer, 2003
- [17] J.A. Sanders, F. Verhulst, Averaging methods in nonlinear dynamical systems, Springer-Verlag, 1985
- [18] A. H. Nayfeh, Method of Normal Forms, John Wiley & Sons, INC., 1993
- [19] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, "Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences", Cambridge University Press, (2001)
- [20] S. H. Strogatz, From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators, Phys. D 143 (2000), no. 1-4, 1–20
- [21] S. ストロガッツ「SYNC」(早川書房, 2005)
- [22] Y. L. Maistrenko, O. V. Popovych, P. A. Tass, Chaotic attractor in the Kuramoto model, Internat. J. Bifur. Chaos, 15 (2005), no. 11, 3457–3466